DIVA: End-term test 2013

Schrijf je naam en schrijf netjes. De punten per opgave staan vetgedrukt

(1) 1. Gegeven is de niet-lineaire, wel separeerbare, 1e orde differentiaalvergelijking

$2y^3 z\frac{dy}{dz} - 2z + 6 = 0$ met $z > 0$

Los deze vergelijking op, met als randvoorwaarde $y(1) = 2$

$$2y^3\frac{dy}{dz} = \frac{2z-6}{z} = 0 \quad \rightarrow \quad \int 2y^3 dy = \int (2 - \frac{6}{z})dz$$

$\frac{2}{4}y^4 = 2z - 6\ln z + C$ en met $y(1) = 2$ wordt dit $\frac{1}{2}.2^4 = 2.1 - 6\ln 1 + C \rightarrow C = 6$

Dus: $y^4 = 2(2z - 6\ln z + 6) \quad \rightarrow \quad y(x) = \sqrt[4]{4z - 12(\ln z - 1)}$

(1) 2. We hebben de volgende inhomogene 1e orde LDV:

$2x\frac{dy}{dx} + y - 2x^{5/2} = 0$

Los eerst de homogene vergelijking op. Stel vervolgens de integratie constante C als een functie van x: C(x). Los daarmee de inhomogene vergelijking op.

Eerst homogene vergelijking:

$$2x\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2x}y = 0 \quad \rightarrow \quad \int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{1}{2x}dx \quad \rightarrow \quad \ln|y| = -\tfrac{1}{2}\ln|x| + C_1$$

$\ln|y| = \ln\left|x^{-1/2}\right| + \ln C_2 \quad \rightarrow \quad y(x) = Cx^{-1/2}$ Stel nu $C = C(x)$ en vul in:

$$2x\frac{dy}{dx} + y - 2x^{5/2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2x}y = x^{3/2} \quad \rightarrow \quad \frac{dC(x)x^{-1/2}}{dx} + \frac{1}{2x}C(x)x^{-1/2} = x^{3/2}$$

$$\rightarrow \quad C'(x)x^{-1/2} - \frac{1}{2}C(x)x^{-3/2} + \frac{1}{2}C(x)x^{-3/2} = x^{3/2}$$

$$\rightarrow \quad C'(x) = x^{3/2}x^{1/2} \quad \rightarrow \quad C(x) = \int x^{4/2}dx = \frac{1}{3}x^3 + C_2$$

$$\rightarrow \quad y(x) = C(x)x^{-1/2} = \frac{1}{3}x^{5/2} + C_2 x^{-1/2}$$

3. De algemene oplossing van een homogene 2e orde LDV met constante coëfficienten $y'' + py' + qy - 2y = 0$ (p,q constant) is $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

De inhomogene vergelijking $y'' + py' + qy - 2y = r(x)$ heeft dan als oplossing

$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ met $y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$

Als we nu eisen dat (1) $u'y_1 + v'y_2 = 0$ dan moet gelden (2) $u'y_1' + v'y_2' = r(x)$

(2) a. Uit de gekoppelde vergelijkingen (1) en (2) kun je uitdrukkingen vinden voor *u'(x)* en *v'(x)* en daarmee voor *u(x)* en *v(x)*. Het blijkt dan dat:

$$u(x) = \int \frac{-y_2 r(x)}{W(x)} \quad \text{en} \quad v(x) = \int \frac{y_1 r(x)}{W(x)} \quad \text{met } W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

Hiermee kunnen we dan in principe iedere 2e orde LDV oplossen, via het zgn. *5 stappen plan*. Leg dat 5 stappen plan eens uit ? Los dan op:

b. $y'' + y' - 2y = 2e^x$ c. $y'' + 6y' + 9y = 12e^{-x}$

a. 1) vind de (complementaire) oplossing van de homogene vergelijking $y_c(x)$

2) uit $y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2$ bereken $W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2$

3) bepaal $u(x) = \int \frac{-y_2 r(x)}{W(x)}$ en $v(x) = \int \frac{y_1 r(x)}{W(x)}$

4) Stel $y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2$ en los de inhomogene vergelijking op:

$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ ofwel $y(x) = (C_1 + u(x))y_1(x) + (C_2 + v(x))y_2(x)$

5) Vind (eventueel) met behulp van de randvoorwaarden C_1 en C_2

b. $y'' + y' - 2y = 2e^x$ Eerst de homogene vergelijking oplossen:

$$y'' + y' - 2y = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 + m - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (m-1)(m+2) = 0 \quad \rightarrow \quad m_1 = 1, m_2 = -2$$

$\rightarrow \quad y_c = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ Vervolgens de inhomogene vergelijking oplossen:

Stel $y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2 = u(x).e^x + v(x).e^{-2x}$

$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = -2e^x.e^{-2x} - e^x.e^{-2x} = -3e^{-x}$ volgt:

$$u(x) = \int \frac{-e^{-2x}.2e^x}{-3e^{-x}} = \int \frac{2}{3}dx = \frac{2}{3}x \quad \text{en} \quad v(x) = \int \frac{e^x.2e^x}{-3e^{-x}} = -\frac{2}{3}\int e^{3x}dx = -\frac{2}{9}e^{3x} \quad \text{en dus}$$

$$y_p = uy_1 + vy_2 = \frac{2}{3}xe^x - \frac{2}{9}e^{3x}e^{-2x} = \frac{2}{3}xe^x - \frac{2}{9}e^x$$

$$y(x) = y_c + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{2}{3}xe^x \underbrace{\left\langle -\frac{2}{9}e^x \right\rangle}_{vervalt}$$

c. $y'' + 6y' + 9y = 12e^{-x}$ Eerst de homogene vergelijking oplossen:

$$y'' + 6y' + 9y = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 + 6m + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad (m+3)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad m = -3$$

$$\rightarrow \quad y_c = C_1 e^{-3x} + C_2 x.e^{-3x} \quad dus \quad y_1 = e^{-3x},\ y_2 = x.e^{-3x}$$

Vervolgens de inhomogene vergelijking oplossen met 3a:

$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{-3x}(e^{-3x} - 3x.e^{-3x}) + 3e^{-3x}.x.e^{-3x} = e^{-6x} - 3xe^{-6x} + 3xe^{-6x} = e^{-6x}$$

$$u(x) = \int \frac{-x.e^{-3x} 12e^{-x}}{e^{-6x}} dx = -12 \int x.e^{2x} dx = -12\left(\frac{1}{2} xe^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx\right)$$

$$\rightarrow \quad u(x) = -12\left(\frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}\right) = -6xe^{2x} + 3e^{2x}$$

$$v(x) = \int \frac{e^{-3x} 12.e^{-x}}{e^{-6x}} = 12 \int e^{2x} dx = 6e^{2x} \text{ en dus}$$

$$y_p = uy_1 + vy_2 = (-6xe^{2x} + 3e^{2x})e^{-3x} + 6e^{2x} xe^{-3x} = -6xe^{-x} + 3e^{-x} + 6xe^{-x} = 3e^{-x}$$

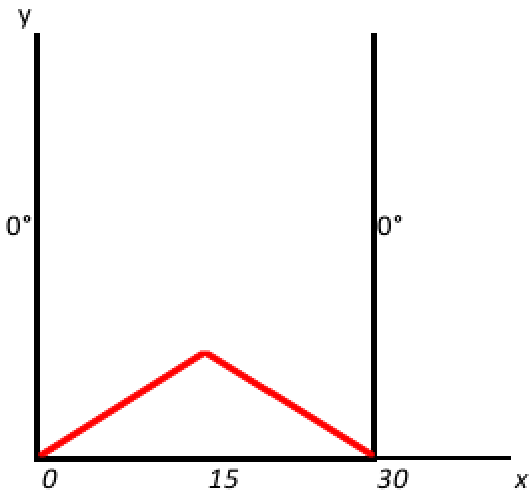
Ofwel: $\quad y(x) = y_c + y_p = C_1 e^{-3x} + C_2 x.e^{-3x} + 3e^{-x}$

(2) 4. *Laplace:* $\nabla^2 T = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ met oplossingen $T = XY = \begin{Bmatrix} e^{ky} \\ e^{-ky} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix}$

Beschouw nu een half-oneindige plaat met breedte 30 cm (x). Alle zijden zijn 0° behalve langs de x-as waar de temperatuur gehouden wordt op:

$$T = f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 15 \\ 30 - x, & 15 < x < 30 \end{cases}$$

Vind de *steady-state* temperatuurverdeling van de plaat.



$y \to \infty \quad \Rightarrow \quad T \to 0 \quad$ dus e^{ky} termen vallen af

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 0 \quad$ dus *cos kx* termen vallen af

$x = 30 \quad \Rightarrow \quad T = 0$ dus

$$\sin kx = \sin \frac{n\pi}{30} x, \quad k = \frac{n\pi}{30} \quad (k > 0)$$

Dus blijven over de $e^{-\frac{n\pi}{30} y}.\sin \dfrac{n\pi}{30} x$ termen met nog te bepalen coëfficienten.

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n . e^{-\frac{n\pi}{30}y} . \sin\frac{n\pi}{30}x \quad \text{Aangezien geldt:} \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad T = f(x) \quad \text{krijgen we}$$

$$T_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{30}x = f(x). \quad \text{Nu nog de } b_n \text{ bepalen:}$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x).\sin kx.dx = \frac{2}{30}\left\{\int_0^{15} x.\sin\frac{n\pi}{30}x.dx + \int_{15}^{30}(30-x).\sin\frac{n\pi}{30}x.dx\right\}$$

$$b_n = \frac{1}{15}\left\{\left[-\frac{30}{n\pi}x.\cos\frac{n\pi}{30}x\right]_0^{15} - \int_0^{15}\frac{-30}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{30}x.dx + \left[-\frac{30^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{30}x\right]_{15}^{30} - \left[-\frac{30}{n\pi}x.\cos\frac{n\pi}{30}x\right]_{15}^{30} + \int_{15}^{30}\frac{-30}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{30}x.dx\right\}$$

$$b_n = \frac{1}{15}\left\{\left[-\frac{450}{n\pi}.\cos\frac{n\pi}{2} - 0\right] - \left[\frac{-900}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{30}x\right]_0^{15} + \left[0 + \frac{450}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\right] + \left[-\frac{900}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{30}x\right]_{15}^{30}\right\}$$

$$b_n = \frac{60}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{60}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{120}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = even \\ \dfrac{120}{(n\pi)^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n = odd \end{cases}$$

$$\text{Dus:} \quad T = \frac{120}{\pi^2}\sum_{n=odd}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2}e^{-\frac{n\pi}{30}y}\sin\frac{n\pi}{30}x$$

(2) 5. *Diffusie vergelijking:* $\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t}$ met oplossingen $u = FT = \begin{Bmatrix} e^{-k^2\alpha^2 t}\sin kx \\ e^{-k^2\alpha^2 t}\cos kx \end{Bmatrix}$

We hebben een plaat met dikte l cm met een *initial steady state* T-verdeling voor $t<0$ met $T_1 = 50°$ links ($x = 0$) en $T_2 = 150°$ ($x = l$). Vanaf $t = 0$ houden we de temperatuur links op $T_1 = 150°$ en rechts op $T_2 = 50°$. Vind de temperatuur-verdeling $u(x,t)$ in de plaat op tijdstip t. *Hint:* het antwoord voor hetzelfde probleem in een huiswerkopgave voor T van (0,100) ($t<0$) naar (100,0) (vanaf $t=0$) was:

$$u = 100 - \frac{100x}{l} - \frac{400}{\pi}\sum_{\substack{2 \\ \text{even } n}}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

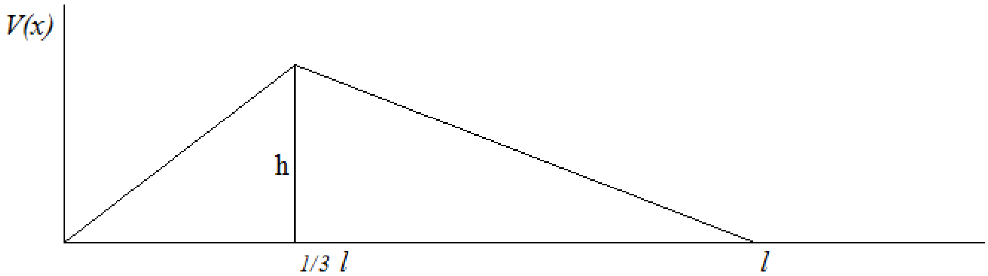
$$u_0 = 50 + \frac{100}{l}x, \quad u_f = 150 - \frac{100}{l}x \quad \Rightarrow \quad u = u_0 - u_f = -100 + \frac{200}{l}x$$

Dit is identiek aan de werkcollege opgave, dus alleen de u_f term aanpasen:

$$u = 150 - \frac{100}{l}x - \frac{400}{\pi}\sum_{even\ n}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t}\sin(n\pi x/l)$$

(2) 6. *Snelheidsvergelijking:* $\nabla^2 y = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, met oplossing $y = XT = \begin{Bmatrix}\sin kx \\ \cos kx\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin \omega t \\ \cos \omega t\end{Bmatrix}$

Neem een snaar met met lengte l en initiëel recht ($y=0$). Op tijdstip $t = 0$ krijgt de snaar een beginsnelheid $V(x) = (\frac{\partial y}{\partial t})_{t=0}$, bv. door 'm aan te slaan. De snaar krijgt de volgende verplaatsing:



Vind de verplaatsing als functie van x en t. Het gaat vooral om het opzetten van de juiste vergelijkingen, gebruikmakend van de gegeven rand- en begin-voorwaarden. Het vinden van de juiste oplossing levert overigens wel wat op.

Dit was BOAS opgave 13.4.7 die ik behandelde op het laatste extra (werk)college:

Here we consider the 1-D wave equation for a string of length l with fixed ends and with the initial condition specified in terms of the initial velocity (instead of the initial position). The dependent variable is $y(x,t)$, the displacement at point x and time t, and we know that the general solution of the wave equations has the form

$$y\left(x,\, t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} \sin k_n x \\ \cos k_n x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin k_n \mathrm{vt} \\ \cos k_n \mathrm{vt} \end{Bmatrix}$$

The fixed end tells us the x dependence is given by the normal modes $\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$, while the initial conditions on $\dot{y}$ tell us to use the $\sin\left(\frac{n\pi \mathrm{vt}}{l}\right)$ for the time dependence (i.e., the $\cos\left(\frac{n\pi \mathrm{vt}}{l}\right)$ terms yield zero derivatives at $t = 0$). Therefore we have

$$y\left(x,\, t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi \mathrm{vt}}{l}\right),$$

$$\dot{y}\left(x,\, 0\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi v}{l} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \begin{cases} \frac{3\mathrm{hx}}{l} : 0 \le x < \frac{l}{3} \\ \frac{3h}{2l}(l-x) : \frac{l}{3} < x \le l \end{cases}.$$

Now we use the initial conditions to solve for the coefficients:

$$\dot{y}\left(x,\, 0\right) = \begin{cases} \frac{3h}{l}x,\ 0 \le x \le \frac{l}{3} \\ \frac{3h}{2l}(l-x),\ \frac{l}{3} \le x \le l \end{cases},$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi v}\,\frac{2}{l}\left\{\int_0^{l/3} \mathrm{d}\,x \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\frac{3\mathrm{hx}}{l} + \int_{l/3}^{l} \mathrm{d}\,x \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\frac{3h}{2l}\left(l-x\right)\right\}$$

$$= \frac{6h}{n\pi \mathrm{vl}}\left\{\left[-\frac{\mathrm{lx}}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]_0^{l/3} + \left[-\frac{l(l-x)}{2n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]_{l/3}^{l} + \left[\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]_0^{l/3} - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]_{l/3}^{l}\right\}$$

$$= \frac{6h}{n\pi \mathrm{vl}}\left\{\left[-\frac{l^2}{3n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right] + \left[\frac{l^2}{3n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right] + \left[\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right] + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{9\mathrm{hl}}{(n\pi)^3 v}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

So finally we have

$$y\left(x,\, t\right) = \frac{9\mathrm{hl}}{\pi^3 v}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi \mathrm{vt}}{l}\right)$$