DIVA - 2011: Mid-term test 1b

Schrijf je naam en schrijf netjes. Er zijn 6 opgaven; opgaven 1-3 geven 1 punt, opgaven 4-5 geven 2 punten, en opgave 6 is 3 punten

1. Gegeven is dat de lading q van een condensator varieert met de tijd. De bijbehorende stroom I wordt gedefinieerd als $I = dq/dt$. Wat is de amplitude, periode en frequency van q resp. I als:

   a) $q = f(t) = \mathrm{Re}\, 4e^{i30\pi t}$ b) $q = f(t) = \mathrm{Im}\, 5e^{i18\pi t}$

2. Er geldt dat $\int_a^b \sin^2 kx\, dx = \int_a^b \cos^2 kx\, dx = \frac{1}{2}(b-a)$ <u>mìts</u> *k(b-a)* een veelvoud van p is, òf indien zowel *kb* als *ka* een veelvoud van ½p zijn. Evalueer nu de volgende integralen zonder ze uit te werken:

   a) $\int_{-1/4}^{11/4} \cos^2 \pi x\, dx$ b) $\int_{-1}^{2} \sin^2(\frac{\pi}{3}x)\, dx$

3. Als je weet dat de Fourier reeks van

   $$f(x) = 0, \quad -\pi < x < 0$$
   $$f(x) = 1, \quad 0 < x < \pi$$

   gelijk is aan $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + ...\right)$

   wat is dan de Fourier reeks voor $g(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 2, & 0 < x < \pi \end{cases}$?

   Schets beide functies over enkele perioden, en leid de eerste term van *g(x)* ($\frac{1}{2}a_o$) grafisch af uit de schets van deze functie. Klopt dit met je antwoord ?

4. We kunnen de reële sinussen en cosinussen van de Fourier reeks ook in complexe vorm schrijven: $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}$ met $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$

   Bepaal nu de c_n van de functie *g(x)* uit de opgave 3 hierboven, en laat zien dat de complexe vorm wederom gelijk is aan je antwoord uit opgave 3.

5. We kunnen in plaats van over een periode van 2p een Fourier reeks ook ontwikkelen over een willekeurige periode 1 = 2*l*. We krijgen dan bv. voor a_n:

   $$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\, dx$$

   Als *f(x)* even dan wel oneven is, wat worden de a_n, b_n dan ?

Schets de volgende functie en herhaal hem enkele keren.

Bepaal of de functie even of oneven is, en bepaal vervolgens de Fourier reeks:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & -2 < x < -1 \quad \text{en} \quad 1 < x < 2 \end{cases}.$$

Antwoord:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi x}{2}\cdots\right)$$

Geldt dat voor alle n ? Schrijf de reeks als een sommatie: $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}$........

6. We verkrijgen een Fourier integraal dmv. een Fourier transformatie.

   Wat is het verschil met een Fourier reeks ?

   $$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha \quad \text{met} \quad g(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx$$

   Als $f(x)$ een oneven of even functie is, wat geldt dan voor $g(a)$?

   Een (on)even $f(x)$ leidt tot de zgn. Fourier cosinus (sinus) transformatie.

   Schets nu de even en de oneven voortzetting van de functie hieronder, en bereken *a)* de Fourier cosinus integraal en *b)* de sinus integraal van:

   $$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x < 2 \\ 1, & 2 < x < 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

   Als het goed is krijg je de volgende antwoorden:

   $$\text{(a)} \quad f_c(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin 3\alpha - 2\sin 2\alpha}{\alpha}\cos\alpha x\, d\alpha$$

   $$\text{(b)} \quad f_s(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{2\cos 2\alpha - \cos 3\alpha - 1}{\alpha}\sin\alpha x\, d\alpha$$

2011 - Mid-Term 1b   OPLOSSINGEN.

1 a) $q = f(t) = \text{Re}\, 4e^{i30\pi t} = 4\cos 30\pi t$ $\quad A=4 \quad T=1/15 \quad f=15$

7.2.12 $\quad \dfrac{dq}{dt} = -120\pi \sin 30\pi t \quad A = 120\pi \quad T=1/15 \quad f=15.$

b) $q = f(t) = \text{Im}\, 5e^{i18\pi t} = 5\sin 18\pi t$ $\quad A=5 \quad T=1/9 \quad f=9$

$I = \dfrac{dq}{dt} = 90\pi \cos 18\pi t \quad$ id.

$A = 90\pi \quad T = 1/9 \quad f = 9$

2 zie opgave **7.4.15**

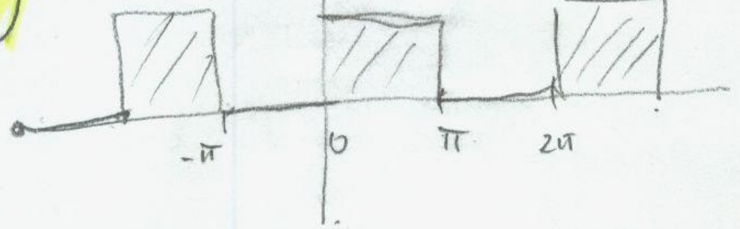
a) $\displaystyle\int_{-1/4}^{11/4} \cos^2 \pi x \, dx \quad k(b-a) = \pi\left(\tfrac{11}{4} - -\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{12}{4}\pi = 3\pi.$

dan: $\frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2}\cdot\frac{12}{4} = \frac{3}{2}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \sin^2 \frac{\pi x}{3} \, dx \quad k(b-a) = \frac{\pi}{3}(2-(-1)) = \pi$ ok.

dan $\frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{3}{2}$

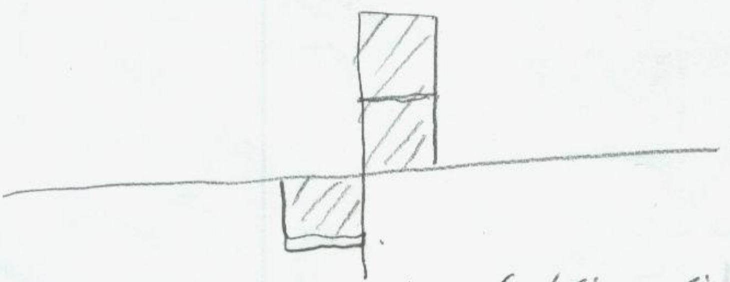
3



$f(x).$

$g(x) = -1 \quad -\pi < x < 0$

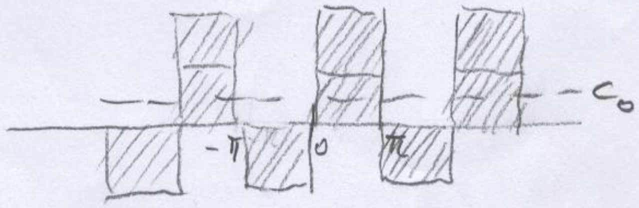
$ = 2 \quad 0 < x < \pi$



$g(x) = 3f(x) - 1$

dus: $g(x) = \left(\frac{3}{2} - 1\right) + \frac{6}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{1} + \dots\right)$

4



$c_0 = \frac{1}{2}$ (grafisch) of werk eventueel uit

via: $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} -1 . e^{-inx}\, dx + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} 2 . e^{-inx} . dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{-e^{-inx}}{-in} \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{2e^{-inx}}{-in} \Big|_{0}^{\pi} \right\}.$$

$$= \frac{1}{-2\pi i n} \left\{ \left(-1 + e^{in\pi}\right) + 2\left(e^{-in\pi} - 1\right) \right\}.$$

$$= \frac{1}{-2\pi i n} \left\{ -1 + (-1)^n + 2\left((-1)^n - 1\right) \right\}$$

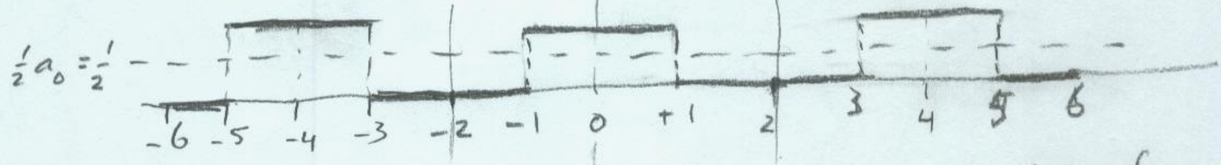
$$= \frac{1}{-2\pi i n} \left\{ 3(-1)^n - 3 \right\}. \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 0 & \text{voor } n \text{ even.} \\ -6 & \text{voor } n \text{ odd} \end{matrix} \right\}$$

$$c_n = \frac{3}{\pi i n}.$$

$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ en werk verder uit als (7.8) en (7.9) op blz. 360 van BOAS

5 Boas $\boxed{7.9.7}$

$l = 2, \; \lambda = 2l = 4$



De functie is <u>even</u>, dus <u>alleen a_n</u> termen bepalen.

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,.dx = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x).\cos\frac{n\pi}{2}x\,.dx$$

$$= \int_0^1 \cos\frac{n\pi}{2}x\,.dx = \frac{2}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{2}x\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{even } n \\ \frac{2}{n\pi}, & n = 1, 5, 9, \ldots \\ \frac{-2}{n\pi}, & n = 3, 7, 11 \end{cases}$$

dus $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left\{\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}x + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}x - \frac{1}{7}\cos\frac{7\pi}{2}x - \ldots\right\}$

<u>Als sommatie</u>: $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}\cdot\cos\frac{(2n-1)}{2}\pi x$

voor $n = 1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5 \ldots$

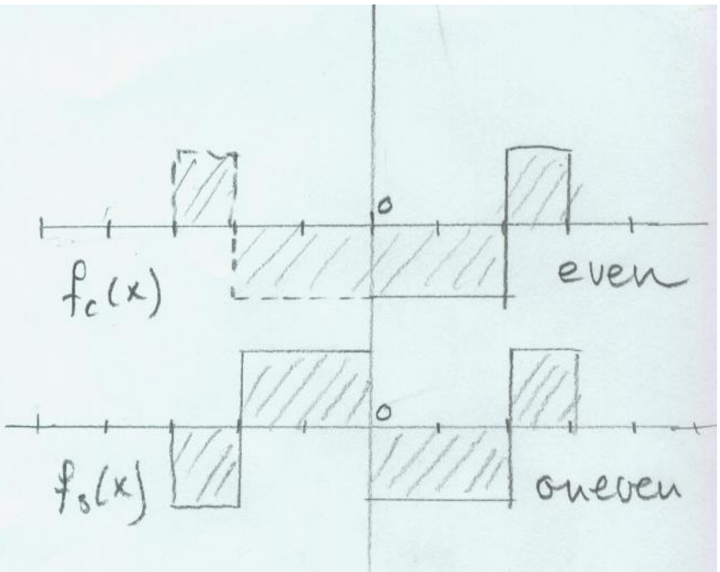
$1 \;\; 3 \;\; 5 \;\; 7 \;\; 9 \ldots = 2n-1, \; (n = 1, 2, \ldots)$

$+1 \; -3 \; +5 \; -7 \; +9 \; -11 = (2n-1)\cdot(-1)^{n+1}$

<u>Maar ook</u>: $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.\sin\frac{n\pi}{2}\,.\cos\frac{n\pi}{2}x$

6) BOAS $\boxed{7.12.29}$

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x < 2 \\ 1, & 2 < x < 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$



Even:

$$g_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \int_0^2 -\cos \alpha x \, .dx + \int_2^3 \cos \alpha x \, dx \right.$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\alpha} \left\{ \Big[-\sin \alpha x \Big]_0^2 + \Big[\sin \alpha x \Big]_2^3 \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\alpha} \left\{ -\sin 2\alpha + (\sin 3\alpha - \sin 2\alpha) \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\alpha} \left\{ \sin 3\alpha - 2 \sin 2\alpha \right\}$$

$$\rightarrow f_c(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin 3\alpha - 2 \sin 2\alpha}{\alpha} \cdot \cos \alpha x \, dx.$$

Oneven

$$g_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \int_0^2 -\sin \alpha x \, .dx + \int_2^3 \sin \alpha x \, .dx \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\alpha} \left\{ \Big[\cos \alpha x \Big]_0^2 + \Big[-\cos \alpha x \Big]_2^3 \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\alpha} \left\{ (\cos 2\alpha - 1) + (-\cos 3\alpha + \cos 2\alpha) \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\alpha} \left\{ 2 \cos 2\alpha - 3 \cos 3\alpha - 1 \right\}$$

$$f_s(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{2 \cos 2\alpha - 3 \cos 3\alpha - 1}{\alpha} \sin \alpha x \, .d\alpha$$