DIVA: Mid-term test 1a - oplossingen

Er zijn 10 opgaven, allemaal 1 punt waard

1. Vind de limiet van de rij $\lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{n!}$

We weten dat $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ voor alle waarden van x (zie Boas en hc+wc), dus de betreffende limiet geeft $\lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{n!} = 0$

2. Gebruik de divergentie test ('preliminary test' in Boas) om te beslissen of de volgende reeks divergent is of verder getest moet worden: $\sum_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2})$

Neem de limiet voor $n \to \infty$: $\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n^2}) = \lim_{n\to\infty} (\frac{n^2 - 1}{n^2}) = \lim_{n\to\infty} (\frac{n^2}{n^2}) - \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n^2}) = 1$

De reeks is dus divergent en verder testen is onnodig

3. Gebruik de ratio test om te bepalen of de volgende reeks convergeert: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{2^{3n}}$

$\rho_n = \left| \frac{3^{2(n+1)}}{2^{3(n+1)}} . \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \right| \to \rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{2n}.3^2}{2^{3n}.2^3} . \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^2}{2^3} \right| = \frac{9}{8}$ dus de reeks divergeert.

4. Vind het convergentie interval voor de machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ = homework 1.10.8

Ratio test: $\rho_n = \left| \frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} . \frac{\sqrt{n}}{x^n} \right| = \left| \frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right| \to \rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right| = |x|$

Met als voorwaarde $r < 1$ voor convergentie, geldt dat voor $-1 < x < +1$ de reeks in ieder geval convergeert. Nu de grenzen verkennen.

$x = -1$: $Sn = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ofwel van de vorm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^p}$ met $p = ½ \leq 1$

en dus is de reeks divergent voor $|x| = -1$

$x = +1$: $Sn = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(+1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ en dus een alternerende reeks.

Aangezien geldt: $|a_{n+1}| < |a_n|$ èn $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = 0$

is de reeks convergent voor $x = +1$

Het convergentie interval is derhalve $-1 < x \le +1$ ofwel $(-1,+1]$

5. Als je weet dat de Taylor reeks voor e^x rond $x = 0$ is: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

   wat is dan de Taylor reeks rond $x = 0$ voor e^{-x^2} ? = Example 1, blz. 29

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$ Substitueer $-x^2$ *voor* x, dan:

$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \frac{(-x^2)^4}{4!} + \ldots = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \ldots$ wat we ook

kunnen schrijven als $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$ Sneaky ! Dus niet: $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}$

6. Laat zien dat de geconjugeerde van een quotient van twee complexe getallen gelijk is aan het quotient van de geconjugeerden.
   Hint: gebruik de $re^{i\varphi}$ vorm en niet de $x + iy$ vorm

Het quotiënt kunnen we bijvoorbeeld schrijven als $\frac{re^{i\vartheta}}{ae^{i\varphi}}$

Je kunt vermenigvuldigen met de geconjugeerde van de noemer zoals gebruikelijk bij een quotiënt, maar in deze notatie hoeft dat niet: $\frac{re^{i\vartheta}}{ae^{i\varphi}} = \frac{r}{a}.e^{i(\vartheta-\varphi)}$

De complex geconjugeerde hiervan is dus $\frac{r}{a}.e^{i(\varphi-\vartheta)} = \frac{re^{-i\vartheta}}{ae^{-i\varphi}}$ (q.e.d)

7. Los de volgende complexe vergelijking op voor x en y

$(2x-3y-5)+i(x+2y+1)=-7$ = homework 2.5.41 (iets veranderd …)

$(2x-3y-5)+i(x+2y+1)=-7$ betekent dat $(2x-3y-5)=-7 \quad \wedge \quad (x+2y+1)=0$

$x+2y+1=0 \quad \rightarrow \quad x=-2y-1$ en dit invullen: $2(-2y-1)-3y-5=-7 \quad \rightarrow \quad y=0$

$2x-3y-5=-7 \quad \rightarrow \quad 2x-0-5=-7 \quad \rightarrow \quad x=-1$

8. Test de complexe reeks $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^n}$ voor convergentie = Example 1, blz. 57

Ratio test geeft $\rho=\lim_{n\to\infty}\rho_n=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1+i)^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(1+i)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+i}{2}\right|=\left|\frac{1+i}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$ = conv.

9. Vind de convergentie cirkel voor de complexe machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n^2}$

Wederom ratio test (*pfhhh …*)

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\rho_n=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{iz^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{iz^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{(n+1)^2}.iz\right|=|iz|$$

Voorwaarde $r<1$ geeft $|iz|<1$ ofwel $|z|<1$ want $|i|=1$

Dit is de cirkel rond de oorsprong in het complexe vlak waarvoor geldt: $x^2+y^2<1$

10. Vind alle complexe wortels voor $z=\sqrt[4]{1}$

$z=\sqrt[4]{1}=1^{1/4}=e^{1/4\,i(0\pi+2k\pi)}$ dus de oplossingen zijn $e^{0\pi i}, e^{1/2\pi i}, e^{\pi i}, e^{3/2\pi i}$ $(e^{2\pi i}=e^{0\pi i})$

ofwel $(1,0)$, $(0,i)$, $(-1,0)$, $(0,-i)$ want na 4 oplossingen zijn we weer rond.