

DIVA: Mid-term test 1a - oplossingen

Er zijn 10 opgaven, allemaal 1 punt waard

1. Vind de limiet van de rij $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n}{n!}$

We weten dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ voor alle waarden van x (zie Boas en hc+wc), dus de

betreffende limiet geeft $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n}{n!} = 0$

2. Gebruik de divergentie test ('preliminary test' in Boas) om te beslissen of de

volgende reeks divergent is of verder getest moet worden: $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Neem de limiet voor $n \rightarrow \infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^2}\right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = 1$

De reeks is dus divergent en verder testen is onnodig

3. Gebruik de ratio test om te bepalen of de volgende reeks convergeert: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{2^{3n}}$

$\rho_n = \left| \frac{3^{2(n+1)}}{2^{3(n+1)}} \cdot \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \right| \rightarrow \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{2n} \cdot 3^2 \cdot 2^{3n}}{2^{3n} \cdot 2^3 \cdot 3^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^2}{2^3} \right| = \frac{9}{8}$ dus de reeks divergeert.

4. Vind het convergentie interval voor de machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ = homework 1.10.8

Ratio test: $\rho_n = \left| \frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{x^n} \right| = \left| \frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right| \rightarrow \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right| = |x|$

Met als voorwaarde $r < 1$ voor convergentie, geldt dat voor $-1 < x < +1$ de reeks in ieder geval convergeert. Nu de grenzen verkennen.

$x = -1$: $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ofwel van de vorm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^p}$ met $p = \frac{1}{2} \leq 1$

en dus is de reeks divergent voor $|x| = 1$

$$x = +1: \quad S_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(+1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ en dus een alternerende reeks.}$$

$$\text{Aangezien geldt: } |a_{n+1}| < |a_n| \quad \text{èn} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = 0$$

is de reeks convergent voor $x = +1$

Het convergentie interval is derhalve $-1 < x \leq +1$ ofwel $(-1, +1]$

5. Als je weet dat de Taylor reeks voor e^x rond $x = 0$ is: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

wat is dan de Taylor reeks rond $x = 0$ voor e^{-x^2} ? = Example 1, blz. 29

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad \text{Substitueer } -x^2 \text{ voor } x, \text{ dan:}$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \frac{(-x^2)^4}{4!} + \dots = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots \quad \text{wat we ook}$$

$$\text{kunnen schrijven als } e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \quad \text{Sneaky ! Dus niet: } e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!}$$

6. Laat zien dat de geconjugeerde van een quotient van twee complexe getallen gelijk is aan het quotient van de geconjugeerden.

Hint: gebruik de re^{iq} vorm en niet de $x + iy$ vorm

$$\text{Het quotiënt kunnen we bijvoorbeeld schrijven als } \frac{re^{i\vartheta}}{ae^{i\varphi}}$$

Je kunt vermenigvuldigen met de geconjugeerde van de noemer zoals gebruikelijk

$$\text{bij een quotiënt, maar in deze notatie hoeft dat niet: } \frac{re^{i\vartheta}}{ae^{i\varphi}} = \frac{r}{a} e^{i(\vartheta-\varphi)}$$

$$\text{De complex geconjugeerde hiervan is dus } \frac{r}{a} e^{i(\varphi-\vartheta)} = \frac{re^{-i\vartheta}}{ae^{-i\varphi}} \text{ (q.e.d)}$$

7. Los de volgende complexe vergelijking op voor x en y

$$(2x - 3y - 5) + i(x + 2y + 1) = -7 = \text{homework 2.5.41 (iets veranderd ...)}$$

$(2x - 3y - 5) + i(x + 2y + 1) = -7$ betekent dat $(2x - 3y - 5) = -7 \wedge (x + 2y + 1) = 0$

$x + 2y + 1 = 0 \rightarrow x = -2y - 1$ en dit invullen: $2(-2y - 1) - 3y - 5 = -7 \rightarrow y = 0$

$2x - 3y - 5 = -7 \rightarrow 2x - 0 - 5 = -7 \rightarrow x = -1$

8. Test de complexe reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$ voor convergentie = Example 1, blz. 57

Ratio test geeft $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(1+i)^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(1+i)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1+i}{2} \right| = \left| \frac{1+i}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 = \text{conv.}$

9. Vind de convergentie cirkel voor de complexe machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n^2}$

Wederom ratio test (pffhhh...)

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{iz^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{iz^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot iz \right| = |iz|$$

Voorwaarde $\rho < 1$ geeft $|iz| < 1$ ofwel $|z| < 1$ want $|i| = 1$

Dit is de cirkel rond de oorsprong in het complexe vlak waarvoor geldt: $x^2 + y^2 < 1$

10. Vind alle complexe wortels voor $z = \sqrt[4]{1}$

$z = \sqrt[4]{1} = 1^{1/4} = e^{1/4 i (0\pi + 2k\pi)}$ dus de oplossingen zijn $e^{0\pi i}, e^{1/2\pi i}, e^{\pi i}, e^{3/2\pi i}$ ($e^{2\pi i} = e^{0\pi i}$)

ofwel $(1,0)$, $(0,i)$, $(-1,0)$, $(0,-i)$ want na 4 oplossingen zijn we weer rond.