DIVA: Mid-term test 1a - oplossingen

Er zijn 10 opgaven, allemaal 1 punt waard

1. Vind de limiet van de rij $\lim_{n\to\infty} n\sin(1/n)$ (1.2.9)

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(1/n)}{1/n} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

2. Gebruik de divergentie test ('preliminary test' in Boas) om te beslissen of de volgende reeks divergent is of verder getest moet worden: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^3+a}}$ (1.5.7)

Hoogste macht in de teller is n, in de noemer $n^{3/2}$, dus de limiet = 0.

Verder testen is nodig.

3. Gebruik de ratio test om te bepalen of de volgende reeks convergeert:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^3 e^{3n}}{(3n)!}$$ (1.6.26)

$$\rho_n = \left|\frac{((n+1)!)^3 e^{3n+3}}{(3n+3)!}\cdot\frac{(3n)!}{(n!)^3 e^{3n}}\right| \to$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\rho_n = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(n+1)(n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}e^3\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^3}{(3n)^3}e^3\right| = (\frac{e}{3})^3$$, dus reeks is convergent.

4. Vind het convergentie interval voor de machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{x}{5})^n$ (1.10.11)

Ratio test: $\rho_n = \left|\frac{n}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{x^n}\right| \to \rho = \lim_{n\to\infty}\rho_n = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\frac{x}{5}\right| = \left|\frac{x}{5}\right|$

Met als voorwaarde $r < 1$ voor convergentie, geldt dat voor $-5 < x < +5$ de reeks in ieder geval convergeert. Nu de grenzen verkennen.

x = -5: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ofwel alternerende reeks, dus convergent

x = +5: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ofwel harmonische reeks, dus divergent.

Het convergentie interval is derhalve -5 $\leq$ $x < +5$ ofwel $[-5,+5)$

5. Als je weet dat de Taylor reeks voor $\ln(1+x)$ rond $x=0$ is:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

wat is dan de Taylor reeks rond $x=0$ voor $\frac{1}{x^k}\ln(1+x)$? See example 1, blz. 27

$$\frac{1}{x^k}\ln(1+x) = \frac{1}{x^k}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n-k}}{n}$$

Substitueer n = $n + 1 - k$, dan:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n-k}}{n} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1-k+1} x^{n+1-k-k}}{n+1-k} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^{n-k} x^{n+1-2k}}{n+1-k}$$

Check voor k = 0: $\frac{1}{x^0}\ln(1+x) = \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x4}{4} + \ldots.$ klopt !

6. Bepaal de complex geconjugeerde van $\frac{ae^{i\vartheta}}{be^{-i\varphi}}$

Herschrijf als quotient. Wat valt op ?

$$z = \frac{ae^{i\vartheta}}{be^{-i\varphi}} = \frac{a}{b}e^{i(\vartheta+\varphi)} \rightarrow \bar{z} = \frac{a}{b}e^{-i(\vartheta+\varphi)} = \frac{ae^{-i\vartheta}}{be^{i\varphi}}$$

Met andere woorden, de complex geconjugeerde van een quotient is het quotient van de complex geconjugeerden van teller en noemer.

7. Los op en schets in het complexe vlak de volgende vergelijkingen

(a) $|1-(x+iy)| = x+iy$ 2.5.49 (b) $z-\bar{z}=5i$ 2.5.55

(a) $|1-(x+iy)| = x+iy$ dus $\sqrt{(1-x)^2+y^2} = x+iy \rightarrow y=0$

Dan: $\sqrt{(1-x)^2} = x \rightarrow |1-x| = x \rightarrow x = \frac{1}{2}$

(b) $z-\bar{z}=5i$ dus $(x+iy)-(x-iy)=5i$ zodat $2y=5 \rightarrow y = \frac{5}{2}$ voor alle x

8. Test de complexe reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\sqrt{n}}$ voor convergentie Example 2, blz. 57

Zie uitwerking in BOAS, blz. 57

9. Vind de convergentie cirkel voor de complexe machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n}$ 2.7.13

Wederom ratio test (*pfhhh …*)

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(z-i)^{n+1}}{n+1} . \frac{n}{(z-i)^n} \right| = |z-i|$$

Voorwaarde $r<1$ geeft een cirkel rond de (0,1) in het complexe vlak met $r<1$

10. Vind alle complexe wortels voor $z = \sqrt[6]{-64}$ 2.10.15

$z = \sqrt[6]{-64} = (64.e^{i(\pi+2n\pi)})^{\frac{1}{6}} = 2.e^{i(\frac{1}{6}\pi+\frac{1}{3}n\pi)}$ dus de 6 oplossingen zijn: $\pm\sqrt{3}\pm i, \quad \pm 2i$