

DIVA: Mid-term test 1a - 2014

Schrijf je naam en schrijf netjes. Er zijn 10 opgaven, allemaal 1 punt waard

1. Vind de limiet van de rij $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+n^2)^{1/\ln n}$ (Hint: neem eerst de ln)

In nemen en uitwerken (kan via l'Hôpital) geeft 2, dus antwoord moet zijn e^2

2. Gebruik de divergentie test ('preliminary test' in Boas) om te beslissen of de volgende reeks divergent is of verder getest moet worden: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{(n+1)^2}$

Limiet volgens hoogste macht, dus $n^2/n^2 = 1$. Dus divergent

3. Bepaal of de volgende reeks convergeert: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n!)^2}$

Ratio test geeft $|10 / (n+1)^2|$ dus in de limiet $\rightarrow 0$ dus convergent

4. Vind het convergentie interval voor de machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n (x^2 + 1)^{2n}}{n!}$

Makkelijkst via substitutie $y = (x^2 + 1)^{2n}$ dus ratio test wordt dan:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{y^{n+1}}{y^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2}{n+1} y \right| = 0 \text{ voor alle } y = (x^2 + 1)^{2n} \text{ dus voor alle } x$$

5. De Taylor reeks voor

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} x^3 + \dots$$

Bepaal nu de Taylor reeks van $\frac{(1+x)}{(1-x)}$

Schrijf $(1+x)/(1-x)$ als product $(1+x)^1 \cdot (1-x)^{-1}$ en ontwikkel beiden volgens

gegeven Taylor reeks met resp. x en $p=1$, en $-x$ en $p=-1$. Antwoord: $1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$

6. Bepaal de complex geconjugeerde \bar{z} van $z = \frac{2-3i}{i+4}$ (als quotient).

Zie example blz. 53 (BOAS): geconjugeerde van z is $(2+3i)/(4-i)$: geconjugeerde van een quotient is quotient van geconjugeerden.

En wat is de complex geconjugeerde van $z + i\bar{z}$? Iets lastiger, maar:

uitwerken geeft ofwel $z + i\bar{z} = \bar{z} - iz$ dan wel $z + i\bar{z} = -\frac{9}{17} + \frac{9}{17}i$ (allebei goed).

7. Los de volgende complexe vergelijking op voor x en y

$$(x + iy)^2 = (x - iy)^2$$

Netjes uitwerken geeft $4xyi=0$ ofwel $x=0$ voor alle y ÒF $y=0$ voor alle x

8. Test de complexe reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} \right)^n$ voor convergentie

Neem (absolute) ratio test en het antwoord is $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} < 1$ dus conv.

9. Vind de convergentie cirkel voor de complexe machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$

Ratio test: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^2}{(2n+3)(2n+2)} \right| = 0$ dus voor alle z

10. a) Schrijf in de $x + iy$ vorm $\left(\frac{\sqrt{2}}{i-1} \right)^{10}$

Na enig puzzelen (diverse mogelijkheden) is het antwoord i .

Bijvoorbeeld: $\left(\frac{\sqrt{2}}{i-1} \right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}} \right)^{10} = e^{-\frac{30}{4}\pi i} = e^{-\frac{6}{4}\pi i - 6\pi i} = e^{-\frac{3}{2}\pi i} = i$

- b) Vind de complexe wortels van $\sqrt[3]{i}$

Zie werkcollege opgave 2.10.19