DIVA: Mid-term test 1a - 2014

Schrijf je naam en schrijf netjes. Er zijn 10 opgaven, allemaal 1 punt waard

1. Vind de limiet van de rij $\lim_{n\to\infty}(1+n^2)^{1/\ln n}$ *(Hint: neem eerst de ln)*

   ln nemen en uitwerken (kan via l'Hôpital) geeft 2, dus antwoord moet zijn ***e²***

2. Gebruik de divergentie test ('preliminary test' in Boas) om te beslissen of de volgende reeks divergent is of verder getest moet worden: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(n+1)^2}$

   Limiet volgens hoogste macht, dus $n^2/n^2 = 1$. Dus divergent

3. Bepaal of de volgende reeks convergeert: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(n!)^2}$

   Ratio test geeft $|10 / (n+1)^2|$ dus in de limiet → 0 dus convergent

4. Vind het convergentie interval voor de machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n(x^2+1)^{2n}}{n!}$

   Makkelijkst via substitutie $y=(x^2+1)^{2n}$ dus ratio test wordt dan:

   $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{2^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\cdot\frac{y^{n+1}}{y^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2}{n+1}y\right|=0$ voor alle $y=(x^2+1)^{2n}$ dus voor alle x

5. De Taylor reeks voor

   $$(1+x)^p=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{n}x^n=1+px+\frac{p(p-1)}{2!}x^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3+\ldots$$

   Bepaal nu de Taylor reeks van $\frac{(1+x)}{(1-x)}$

   Schrijf *(1+x)/(1-x)* als product $(1+x)^1 \,.\, (1-x)^{-1}$ en ontwikkel beiden volgens gegeven Taylor reeks met resp. x en *p=1*, en *-x* en *p=-1*. Antwoord: $1+2\sum_{n=1}^{\infty}n^2$

6. Bepaal de complex geconjugeerde $\bar{z}$ van $z=\frac{2-3i}{i+4}$ (als quotient).

   Zie example blz. 53 (BOAS): geconjugeerde van z is *(2+3i)/(4-i)*: geconjugeerde van een quotient is quotient van geconjugeerden.

   En wat is de complex geconjugeerde van $z+i\bar{z}$? Iets lastiger, maar:

   uitwerken geeft ofwel $\overline{z+i\bar{z}}=\bar{z}-iz$ dan wel $\overline{z+i\bar{z}}=-\frac{9}{17}+\frac{9}{17}i$ (allebei goed).

7. Los de volgende complexe vergelijking op voor x en y

$(x+iy)^2 = (x-iy)^2$

Netjes uitwerken geeft *4xyi=0* ofwel *x=0 voor alle y* ÒF *y=0 voor alle x*

8. Test de complexe reeks $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^n$ voor convergentie

   Neem (absolute) ratio test en het antwoord is $\sqrt{2}\big/\sqrt{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} < 1$ dus conv.

9. Vind de convergentie cirkel voor de complexe machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$

   Ratio test: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^2}{(2n+3)(2n+2)}\right| = 0$ dus voor alle *z*

10. a) Schrijf in de $x + iy$ vorm $\left(\frac{\sqrt{2}}{i-1}\right)^{10}$

    Na enig puzzelen (diverse mogelijkheden) is het antwoord ***i***.

    Bijvoorbeeld: $\left(\frac{\sqrt{2}}{i-1}\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}}\right)^{10} = e^{-\frac{30}{4}\pi i} = e^{-\frac{6}{4}\pi i - 6\pi i} = e^{-\frac{3}{2}\pi i} = i$

    b) Vind de complexe wortels van $\sqrt[3]{i}$

    Zie werkcollege opgave 2.10.19