

DIVA: Mid-term test 1b

Schrijf je naam en schrijf netjes. Er zijn 10 opgaven, allemaal 1 punt waard

zie scan van handgeschreven oplossingen aan het eind

1. Gegeven is de complexe periodische functie  $z = f(t) = 2e^{-it/2}$

7.2.8

Laat zien dat  $x(t) = \text{Re } z$  en  $y(t) = \text{Im } z$  een simpele harmonische beweging ondergaan, en bepaal de amplitude, periode, frequentie en amplitude van de snelheid van de beweging.

1

2. Vind de gemiddelde waarde van  $\cos^2 \frac{7\pi x}{2}$  over  $(0, \frac{\pi}{2})$

7.4.12

1

3. Als je weet dat de Fourier reeks van

Ex 1+2 pag. 353/354

$f(x) = 0, -\pi < x < 0$   
 $f(x) = 1, -0 < x < \pi$  gelijk is aan  $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$

wat is dan de Fourier reeks voor  $g(x) = -1, -\pi < x < 0$   
 $g(x) = 1, -0 < x < \pi$  ?

1

Schets beide functies over enkele perioden, en leidt de eerste term van  $g(x)$  ( $\frac{1}{2}a_0$ ) grafisch af uit de schets van deze functie. Klopt dit met je antwoord ?

4. We kunnen de reële sinussen en cosinussen van de Fourier reeks ook in

Example pag. 359

complexe vorm schrijven:  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}$  met  $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$

Bepaal nu de  $c_n$  van de functie  $f(x)$  uit de opgave 3 hierboven, en laat zien dat

de complexe vorm wederom gelijk is aan  $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$

2

5. We kunnen in plaats van over een periode van  $2\pi$  een Fourier reeks ook ontwikkelen over een willekeurige periode  $\lambda = 2l$ . We krijgen dan bv. voor  $a_n$ :

howe 7.9.10

$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ . Het wordt nog mooier als  $f(x)$  een even functie is:

1/2

wat worden de  $a_n$  dan ? Bepaal hiermee nu de Fourier reeks voor de functie:

1

$f(x) = |x|, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ . Schets de functie en herhaal hem enkele keren.

Als het goed is, krijg je eruit:  $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2nx$ . Geldt dat voor alle  $n$  ?

1/2

F. 12.28  
WC

6. We verkrijgen een Fourier integraal dmv. een Fourier transformatie. Leg in maximaal 5 regels (leesbaar) uit wat het verschil is tussen een Fourier reeks en een Fourier integraal.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \text{ met } g(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

Als  $f(x)$  een oneven (even) functie is dan is  $g(\alpha)$  ook oneven (even), hetgeen leidt tot de Fourier sinus (cosinus) transformaties. Deze zijn eenvoudig af te leiden (hoeft niet nu). Bereken nu a) de Fourier cosinus integraal en b) de sinus integraal van:

$$f(x) = 1, \quad 2 < x < 4$$

$$f(x) = 0, \quad 0 < x < 2, x > 4$$

Als het goed is krijg je (ongeveer) de volgende antwoorden:

(a)  $f_c(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos 3\alpha \sin \alpha}{\alpha} \cos \alpha x d\alpha$

$\frac{\cos 3\alpha}{\alpha} = \frac{e}{0} = 0 \quad \sin = 0 \rightarrow 0 \cdot 0 = 0$

(b)  $f_s(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin 3\alpha \sin \alpha}{\alpha} \sin \alpha x d\alpha$

$\frac{\sin 3\alpha}{\alpha} = \frac{0}{0} = e \quad \sin = 0 \rightarrow e \cdot 0 = 0$

cosinus:  $f_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g_c(x) \cos \alpha x d\alpha$

$g_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx$

sinus:  $f_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g_s(x) \sin \alpha x d\alpha$

$g_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_s(x) \sin \alpha x dx$

$$\textcircled{1} \quad z = 2e^{-\frac{1}{2}it} = 2 \cos(-\frac{1}{2}t) + 2i \sin(-\frac{1}{2}t)$$

$$\boxed{7.2.8} \quad A=2 \quad T = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi \rightarrow f = \frac{1}{4\pi}$$

$$\frac{dz}{dt} = -ie^{-\frac{1}{2}it} = -\sin(-\frac{1}{2}t) - i \cos(-\frac{1}{2}t)$$

$$A_{vel} = 1$$

$\textcircled{2}$ .  $f(x)$ : average?

$$\boxed{7.4.12} \quad \frac{7}{8} \int_0^{8/7} \cos^2 \frac{7\pi x}{2} dx \quad \text{over } (0, 8/7)$$

Periode  $\frac{2\pi}{7\pi/2} = \frac{4}{7}$  dus  $f(x)$  here is gemiddeld

van  $\cos^2 nx = \frac{1}{2}$  over  $\frac{8}{7} = 2$  hele periodes

Ook: Stel:  $x = \frac{4}{7\pi} t$   $x=0 \rightarrow t=0$   
 $x = 8/7 \rightarrow t = \frac{8}{7} \cdot \frac{7\pi}{4} = 2\pi$

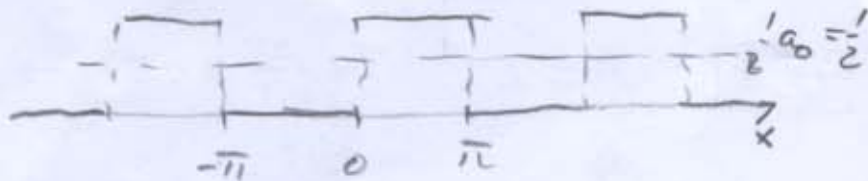
$$t = \frac{7\pi}{4} x \rightarrow dx = \frac{4}{7\pi} dt$$

$$\text{dus: } \frac{4 \cdot 7}{7\pi \cdot 8} \int_0^{2\pi} \cos^2 \frac{7\pi \cdot 4}{7\pi \cdot 2} t dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 2t dt = \frac{1}{2}$$

③ Examples 1+2, blz 353/354.

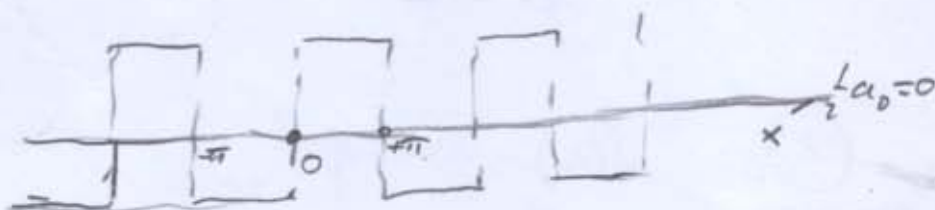
$$f(x) = 0, \quad -\pi < x < 0$$

$$= 1, \quad 0 < x < \pi$$



$$g(x) = -1, \quad -\pi < x < 0$$

$$= 1, \quad 0 < x < \pi$$



Realiseer:

$$g(x) = 2f(x) - 1$$

$$\text{Dan } f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

$$g(x) = 2f(x) - 1 = \cancel{1} + \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right) - \cancel{1}$$

$$= \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

Het gemiddelde  $\frac{1}{2}a_0$  is inderdaad nul, zoals uit de schets blijkt.

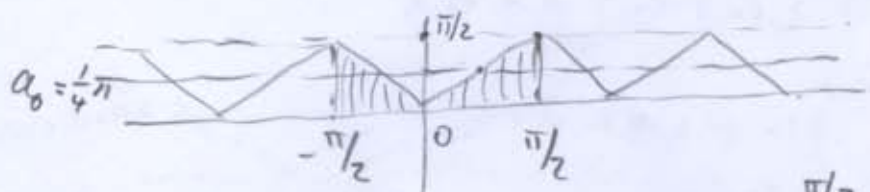
④ Zie uitwerking van example op blz. 359 van Boas?

5

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

home 7.9.10

even functie:  $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$



$$f(x) = |x|, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$l = \frac{\pi}{2}, \text{ even}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x \cos 2nx dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \cos 2nx dx$$

$$= \frac{4}{\pi} \left[ \frac{x \sin 2nx}{2n} \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx}{2n} dx \right]$$

$$= \frac{4}{\pi} \left[ 0 - 0 - \frac{\cos 2nx}{4n^2} \Big|_0^{\pi/2} \right] = \frac{4}{\pi} \left( \frac{(-1)^n - 1}{4n^2} \right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{voor even } n \ (n \neq 0) \\ -\frac{2}{\pi n^2} & \text{voor oneven } n \end{cases}$$

$\frac{1}{2} a_0 = \frac{\pi}{4}$  (grafisch, zie schets)

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} x dx = \frac{4}{\pi} \left[ \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\pi/2} \right] = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{2^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \cos 2x - \frac{2}{4\pi} \cos 4x - \dots$$

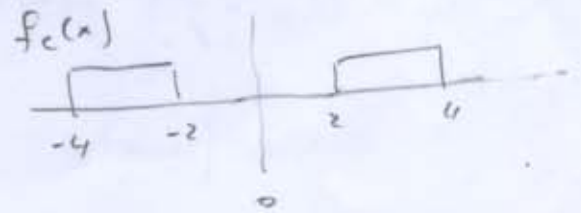
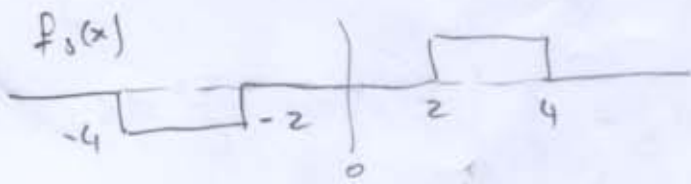
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1, \text{ odd}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2nx$$

dit alleen voor  $n = \text{oneven}$ .

6

7.12.20 WC

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 2 < x < 4 \\ 0, & 0 < x < 2 \end{cases}$$



$$a) g_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_c(x) \cos \alpha x dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_2^4 1 \cos \alpha x dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha} [\sin \alpha x]_2^4 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\alpha} (2 \sin \alpha \cos 3\alpha)$$

$$f_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g_c(\alpha) \cos \alpha x d\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{2 \sin \alpha \cos 3\alpha}{\alpha} \cos \alpha x d\alpha$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{2 \sin \alpha \cos 3\alpha}{\alpha} \cos \alpha x d\alpha$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha}{\alpha} \cos \alpha x d\alpha$$

$$b) g_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_s(x) \sin \alpha x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_2^4 1 \sin \alpha x dx$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{\alpha} [\cos 4\alpha - \cos 2\alpha] = \frac{2 \sin 3\alpha \sin \alpha}{\alpha}$$

$$f_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g_s(\alpha) \sin \alpha x d\alpha$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha}{\alpha} \sin \alpha x d\alpha$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\alpha} \right) \sin \alpha x d\alpha$$