DIVA: Mid-term test 1b

Schrijf je naam en schrijf netjes. Er zijn 6 opgaven; opgaven 1-3 geven 1 punt, opgaven 4-5 geven 2 punten, en opgave 6 is 3 punten

1. Gegeven is de complexe periodische functie $z = f(t) = 5e^{-it/3}$

   Laat zien dat $x(t)$ = Re z en $y(t)$ = Im z een simpele harmonische beweging ondergaan, en bepaal de amplitude, periode, frequentie en amplitude van de snelheid van de beweging.

   $A = 5, \quad T = 6\pi \rightarrow f = \tfrac{1}{6}\pi, \quad A_v = \tfrac{5}{3}$ omdat $\dfrac{dz}{dt} = \left|-\tfrac{5}{3}i\right| = \tfrac{5}{3}$

2. Vind de gemiddelde waarde van $\sin 2x$ over $(\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6})$

   De periode van $\sin 2x$ is p, dus over $(\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6})$ is $\overline{\sin 2x} = 0$

3. Als je weet dat de Fourier reeks van

   $\begin{array}{l} f(x) = 1, \quad -\pi < x < 0 \\ f(x) = 0, \quad -0 < x < \pi \end{array}$ gelijk is aan $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\sin x}{1} + \dfrac{\sin 3x}{3} + \dfrac{\sin 5x}{5} + \ldots.\right)$

   wat is dan de Fourier reeks voor $\begin{array}{l} g(x) = 0, \quad -\pi < x < 0 \\ g(x) = 1, \quad -0 < x < \pi \end{array}$?

   Schets beide functies over enkele perioden, en leidt de eerste term van $g(x)$ ($\frac{1}{2}a_o$) grafisch af uit de schets van deze functie. Klopt dit met je antwoord ?

   Realiseer je dat geldt:

$$g(x) = 1 - f(x) = 1 - \left\{\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots.\right)\right\} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots.\right)$$

4. We kunnen de reële sinussen en cosinussen van de Fourier reeks ook in

   complexe vorm schrijven: $f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}$ met $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$

   Bepaal nu de c_n van de functie $g(x)$ uit de opgave 3 hierboven, en laat zien dat de complexe vorm wederom gelijk is aan je antwoord uit opgave 3.

   Zie het example op pagina 359 van BOAS

5. We kunnen in plaats van over een periode van 2p een Fourier reeks ook ontwikkelen over een willekeurige periode l = 2l. We krijgen dan bv. voor a_n:

   $a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x) \cos\dfrac{n\pi}{l} x \, dx$

   Als $f(x)$ even dan wel oneven is, wat worden de a_n dan ?

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx,\quad a_n \; even \text{ en } a_n = 0,\quad a_n \; oneven$$

Bepaal hiermee nu de Fourier reeks voor de functie:

$f(x) = x^2, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. Schets de functie en herhaal hem enkele keren.

Als het goed is, krijg je eruit: $f(x) = \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2}\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}\cos 2n\pi x$

Opgave 7.9.9. uit Boas

$$f(x) = x^2,\quad -\tfrac{1}{2} < x < \tfrac{1}{2} \quad dus \quad (-l,l) = (-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \quad ofwel \quad l = \tfrac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\cos\frac{n\pi}{\frac{1}{2}}x\,dx,\quad want \;\; f(x) \; is \; even$$

$$a_n = \frac{4}{2n\pi}\left[x^2\sin 2n\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} 2x\sin n\pi x\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\left\{\left[(\tfrac{1}{2})^2\sin 2n\pi - 0\right] + \left[\frac{2x\cos 2n\pi x}{2n\pi}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2\cos 2n\pi x}{2n\pi}dx\right\}$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\left\{0 - 0 + \frac{\frac{1}{2}\cos n\pi}{n\pi} - 0 - \left[\frac{\sin 2n\pi x}{2n^2\pi^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\left\{\frac{(-1)^n}{2n\pi} - 0 - 0\right\} = \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

$$a_0 = 4\int_0^{\frac{1}{2}} x^2dx = \tfrac{4}{3}x^3\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \tfrac{4}{3}\tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{6}$$

Geldt dat voor alle *n* ? **Ja ...** Schrijf de termen voor *n = 1,2,3* uit.

$$f(x) = \tfrac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2}\left(\cos 2\pi x - \tfrac{1}{2^2}\cos 4\pi x - \tfrac{1}{3^2}\cos 6\pi x - \ldots\right)$$

6. We verkrijgen een Fourier integraal dmv. een Fourier transformatie.

Wat is het verschil met een Fourier reeks ? Zie BOAS

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha \text{ met } g(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx$$

Als $f(x)$ een oneven (even) functie is dan is $g(a)$ ook oneven (even), hetgeen leidt tot de Fourier sinus (cosinus) transformaties. Bereken nu

a) de Fourier cosinus integraal en *b)* de sinus integraal van:

$$f(x) = 1,\quad 0 < x < \pi/2$$
$$f(x) = 0,\quad x > \pi/2$$

Als het goed is krijg je de volgende antwoorden:

$$\text{(a)}\ f_c(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha\pi/2)}{\alpha}\cos\alpha x\, d\alpha$$

$$\text{(b)}\ f_s(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos(\alpha\pi/2)}{\alpha}\sin\alpha x\, d\alpha$$

Voor de <u>even</u> voortzetting op $x < 0$ wordt de oplossing:

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi/2}\cos\alpha x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{1}{\alpha}\sin\alpha x\right]_0^{\pi/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\alpha}\sin\alpha\, \pi/2$$ dus

$$f_c(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\alpha\, \pi/2}{\alpha}\cos\alpha x dx$$

Voor de <u>oneven</u> voortzetting op $x < 0$ wordt de oplossing:

$$F_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi/2}\sin\alpha x dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x\right]_0^{\pi/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\alpha}(1-\cos\alpha\, \pi/2)$$ dus

$$f_s(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha\, \pi/2}{\alpha}\sin\alpha x dx$$