DIVA - 2013: Mid-term test 1b

Schrijf je naam en schrijf netjes. Er zijn 6 opgaven; opgaven 1-3 geven 1 punt, opgaven 4-5 geven 2 punten, en opgave 6 is 3 punten

1. Gegeven is dat de lading q van een condensator varieert met de tijd. De bijbehorende stroom I wordt gedefinieerd als $I = dq/dt$. Wat is de amplitude (A), periode (T) en frequency (f) van q resp. I als:

   a) $q = f(t) = \mathrm{Re}\, 6e^{i24\pi t}$ b) $q = f(t) = \mathrm{Im}\, 3.5e^{i\frac{4\pi}{l}t}$ Vrij naar 7.2.12

a) $q = f(t) = 6\cos 24\pi t$

$A_q = 6,\ T_q = 1/12,\ f_q = 12$

$I = dq/dt = -144\pi \sin 24\pi t$

$A_I = 144\pi,\ T_I = 1/12,\ f_I = 12$

b) $q = f(t) = 3.5\sin\frac{4\pi}{l}t$

$A_q = 3.5,\ T_q = \frac{l}{2\pi},\ f_q = \frac{2\pi}{l}$

$I = dq/dt = \frac{14\pi}{l}\cos\frac{4\pi}{l}t$

$A_I = 3.5,\ T_I = \frac{l}{2\pi},\ f_I = \frac{2\pi}{l}$

2. Er geldt dat $\int_a^b \sin^2 kx\, dx = \int_a^b \cos^2 kx\, dx = \frac{1}{2}(b-a)$ <u>mits</u> *k(b-a)* een veelvoud van π is, òf indien zowel *kb* als *ka* een veelvoud van ½π zijn. Evalueer nu de volgende integralen zonder ze uit te werken. Vrij naar 7.4.16 (huiswerk opgave)

a) $\int_{2.5\pi/\omega}^{3.0\pi/\omega} \sin^2 2\omega t\, dt = \frac{1}{2}(3.0-2.5)\pi/\omega = \frac{1}{4}\pi/\omega \quad \Leftarrow \quad 2\omega\, 0.5\pi/\omega = \pi$

b) $\int_{1.2}^{1.7} \cos^2 2\pi t\, dt = \frac{1}{2}(1.7-1.2) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{2}2\pi = \pi$

3. Als je weet dat de Fourier reeks van

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < \frac{1}{2}\pi \\ 1, & \frac{1}{2}\pi < x < \pi \end{cases} \quad = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x \cdots\right) + \frac{1}{\pi}\left(\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x \cdots\right)$$

wat is dan de Fourier reeks voor $g(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < \frac{1}{2}\pi \\ 1, & \frac{1}{2}\pi < x < \pi \end{cases}$? Zie 7.5.3 & 7.5.4

Realiseer dat geldt $g(x) = -1 + 2f(x)$, dus *g(x)* wordt dan

$$= -\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x \cdots\right) + \frac{2}{\pi}\left(\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{2}{6}\sin 6x \cdots\right)$$

4. We kunnen de reële sinussen en cosinussen van de Fourier reeks ook in complexe vorm schrijven: $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}$ met $c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$

Bepaal nu de c_n van de functie $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ x, & 0<x<\pi\end{cases}$ Opgave 7.7.7

$$c_0=\frac{\pi}{4}\quad c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} xe^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{xe^{-inx}}{-in}\bigg|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{e^{=-inx}}{in}dx\right\}=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{i\pi e^{-in\pi}}{n}+\frac{e^{-inx}}{-i^2n^2}\bigg|_0^{\pi}\right\}$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{i\pi e^{-in\pi}}{n}+\frac{e^{-in\pi}}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right\}=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{i\pi(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right\}=\begin{cases}\frac{i}{2n}, & n\ even\\ \frac{-1}{\pi n^2}-\frac{i}{2n}, & n\ odd\end{cases}$$

Dus:

$$7.7\qquad f(x)=\frac{\pi}{4}-\sum_{\substack{-\infty\\ \text{odd } n}}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2\pi}+\frac{i}{2n}\right)e^{inx}+\sum_{\substack{-\infty\\ \text{even } n\neq 0}}^{\infty}\frac{i}{2n}e^{inx}$$
$$=\frac{\pi}{4}-\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\ nx-\frac{2}{\pi}\sum_{\substack{1\\ \text{odd } n}}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\ nx$$

5. We kunnen een Fourier reeks ook ontwikkelen over een willekeurige periode $\lambda = 2l$. We krijgen dan bv. $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$. Wat zijn de b_n ?

Schets de volgende functie en herhaal hem enkele keren. Opgave 7.9.9

$$f(x)=x^2,\quad -\tfrac{1}{2}<x<\tfrac{1}{2}$$

Bepaal of de functie even of oneven is, en bepaal vervolgens de Fourier reeks

$$a_0=2\int_0^{1/2}x^2dx=2.\frac{1}{3}x^3\bigg|_0^{1/2}=\frac{2}{3}.\frac{1}{8}=\frac{1}{12}$$

$$a_n=2.\frac{1}{1/2}\int_0^{1/2}x^2\cos 2n\pi x\,dx=\frac{4}{2n\pi}\left\{x^2\sin 2n\pi x\Big|_0^{1/2}-\int_0^{1/2}2x\sin 2n\pi x dx\right\}$$

$$a_n=\frac{2}{n\pi}\left\{(\tfrac{1}{2})^2\sin n\pi-0+\frac{2x\cos 2n\pi x}{2n\pi}\bigg|_0^{1/2}-\int_0^{1/2}\frac{2\cos 2n\pi x}{2n\pi}dx\right\}$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\left\{\frac{\cos n\pi}{2n\pi} - 0 - \frac{\sin 2n\pi x}{2(n\pi)^2}\Bigg|_0^{1/2}\right\} = \frac{2}{n\pi}\left\{\frac{(-1)^n}{2n\pi} - 0\right\} = \frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{\cos 2\pi x}{1} - \frac{\cos 4\pi x}{4} + \frac{\cos 6\pi x}{9} - \ldots\right\} \text{ ofwel:}$$

$$f(x) = \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos 2n\pi x$$

6. We verkrijgen een Fourier transformatie (FT) als volgt:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha \text{ met } g(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx$$

Op het werkcollege heb je opgave 7.12.11 gemaakt:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases}$$

Niet zo eenvoudig, maar met $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ is er wel uit te komen

Bepaal nu de FT van $f(x) = \begin{cases} \sin x, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases}$ (gebruik $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$) 7.12.12

Zie het werkcollege, en verander details zoals de extra i en het minteken.

$$f(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha\cos(\alpha\pi/2)}{1-\alpha^2}e^{i\alpha x}\,d\alpha$$