

DIVA - 2013: Mid-term test 1b

Schrijf je naam en schrijf netjes. Er zijn 6 opgaven; opgaven 1-3 geven 1 punt, opgaven 4-5 geven 2 punten, en opgave 6 is 3 punten

1. Gegeven is dat de lading q van een condensator varieert met de tijd. De bijbehorende stroom I wordt gedefinieerd als $I = dq/dt$. Wat is de amplitude (A), periode (T) en frequency (f) van q resp. I als:

a) $q = f(t) = \operatorname{Re} 6e^{i24\pi t}$ b) $q = f(t) = \operatorname{Im} 3.5e^{i\frac{4\pi}{l}t}$ **Vrij naar 7.2.12**

| | |
|--|---|
| a) $q = f(t) = 6 \cos 24\pi t$ | b) $q = f(t) = 3.5 \sin \frac{4\pi}{l} t$ |
| $A_q = 6, T_q = \frac{1}{12}, f_q = 12$ | $A_q = 3.5, T_q = \frac{l}{2\pi}, f_q = \frac{2\pi}{l}$ |
| $I = \frac{dq}{dt} = -144\pi \sin 24\pi t$ | $I = \frac{dq}{dt} = \frac{14\pi}{l} \cos \frac{4\pi}{l} t$ |
| $A_I = 144\pi, T_I = \frac{1}{12}, f_I = 12$ | $A_I = 3.5, T_I = \frac{l}{2\pi}, f_I = \frac{2\pi}{l}$ |

2. Er geldt dat $\int_a^b \sin^2 kx \, dx = \int_a^b \cos^2 kx \, dx = \frac{1}{2}(b-a)$ mits $k(b-a)$ een veelvoud van π is, òf indien zowel kb als ka een veelvoud van $\frac{1}{2}\pi$ zijn. Evalueer nu de volgende integralen zonder ze uit te werken. **Vrij naar 7.4.16 (huiswerk opgave)**

a) $\int_{\frac{2.5\pi}{\omega}}^{\frac{3.0\pi}{\omega}} \sin^2 2\omega t \, dt = \frac{1}{2}(3.0 - 2.5)\frac{\pi}{\omega} = \frac{1}{4}\frac{\pi}{\omega} \iff 2\omega \cdot 0.5\frac{\pi}{\omega} = \pi$

b) $\int_{1.2}^{1.7} \cos^2 2\pi t \, dt = \frac{1}{2}(1.7 - 1.2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \iff \frac{1}{2}2\pi = \pi$

3. Als je weet dat de Fourier reeks van

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < \frac{1}{2}\pi \\ 1, & \frac{1}{2}\pi < x < \pi \end{cases} = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x \dots \right) + \frac{1}{\pi} \left(\sin x - \frac{2}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x \dots \right)$$

wat is dan de Fourier reeks voor $g(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < \frac{1}{2}\pi \\ 1, & \frac{1}{2}\pi < x < \pi \end{cases}$? **Zie 7.5.3 & 7.5.4**

Realiseer dat geldt $g(x) = -1 + 2f(x)$, dus $g(x)$ wordt dan

$$= -\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x \dots \right) + \frac{2}{\pi} \left(\sin x - \frac{2}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x - \frac{2}{6} \sin 6x \dots \right)$$

4. We kunnen de reële sinussen en cosinussen van de Fourier reeks ook in

complexe vorm schrijven: $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}$ met $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$

Bepaal nu de c_n van de functie $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ **Opgave 7.7.7**

$$c_0 = \frac{\pi}{4} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left\{ \left. \frac{x e^{-inx}}{-in} \right|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{e^{-inx}}{in} dx \right\} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{i\pi e^{-in\pi}}{n} + \frac{e^{-inx}}{-i^2 n^2} \right\}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{i\pi e^{-in\pi}}{n} + \frac{e^{-in\pi}}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right\} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{i\pi(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right\} = \begin{cases} \frac{i}{2n}, & n \text{ even} \\ \frac{-1}{\pi n^2} - \frac{i}{2n}, & n \text{ odd} \end{cases}$$

Dus:

$$\begin{aligned} 7.7 \quad f(x) &= \frac{\pi}{4} - \sum_{\substack{-\infty \\ \text{odd } n}}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2\pi} + \frac{i}{2n} \right) e^{inx} + \sum_{\substack{-\infty \\ \text{even } n \neq 0}}^{\infty} \frac{i}{2n} e^{inx} \\ &= \frac{\pi}{4} - \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx - \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx \end{aligned}$$

5. We kunnen een Fourier reeks ook ontwikkelen over een willekeurige periode

$\lambda = 2l$. We krijgen dan bv. $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx$. Wat zijn de b_n ?

Schets de volgende functie en herhaal hem enkele keren. **Opgave 7.9.9**

$$f(x) = x^2, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

Bepaal of de functie even of oneven is, en bepaal vervolgens de Fourier reeks

$$a_0 = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx = 2 \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{12}$$

$$a_n = 2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \cos 2n\pi x dx = \frac{4}{2n\pi} \left\{ x^2 \sin 2n\pi x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} 2x \sin 2n\pi x dx \right\}$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin n\pi - 0 + \frac{2x \cos 2n\pi x}{2n\pi} \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2 \cos 2n\pi x}{2n\pi} dx \right\}$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \left\{ \frac{\cos n\pi}{2n\pi} - 0 - \frac{\sin 2n\pi x}{2(n\pi)^2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} \right\} = \frac{2}{n\pi} \left\{ \frac{(-1)^n}{2n\pi} - 0 \right\} = \frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{\cos 2\pi x}{1} - \frac{\cos 4\pi x}{4} + \frac{\cos 6\pi x}{9} - \dots \right\} \text{ ofwel:}$$

$$f(x) = \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos 2n\pi x$$

6. We verkrijgen een Fourier transformatie (FT) als volgt:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \quad \text{met} \quad g(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

Op het werkcollege heb je opgave 7.12.11 gemaakt:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases}$$

Niet zo eenvoudig, maar met $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ is er wel uit te komen

Bepaal nu de FT van $f(x) = \begin{cases} \sin x, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases}$ (gebruik $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$) **7.12.12**

Zie het werkcollege, en verander details zoals de extra i en het minteken.

$$f(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha \cos(\alpha\pi/2)}{1 - \alpha^2} e^{i\alpha x} d\alpha$$