

## DIVA: End-term test

Schrijf je naam en schrijf netjes. De punten per opgave staan vetgedrukt

- (1) 1. Gegeven is de niet-lineaire, wel separeerbare, 1e orde differentiaalvergelijking

$$y^2 t \frac{dy}{dt} - t + 1 = 0 \text{ met } t > 0$$

Los deze vergelijking op, met als randvoorwaarde  $y(1) = 3$

$$y^2 t \frac{dy}{dt} - t + 1 = 0 \rightarrow y^2 \frac{dy}{dt} = \frac{t-1}{t} \rightarrow \int y^2 dy = \int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt \rightarrow \frac{1}{3} y^3 = t - \ln t + C$$

$$\text{Randvoorwaarde geeft: } y(1) = 3 \rightarrow \frac{1}{3} 3^3 = 1 - \ln 1 + C \rightarrow C = 8$$

$$\text{Ofwel } y(t) = \sqrt[3]{3(t - \ln t + 8)}$$

- (1) 2. We hebben de volgende inhomogene 1e orde LDV:

$$\frac{dy}{dx} - 2y \cos 2x + 2 \sin 2x \cdot e^{\sin 2x} = 0$$

Los eerst de homogene vergelijking op. Stel vervolgens de integratie constante C als een functie van x:  $C(x)$ . Los daarmee de inhomogene vergelijking op.

Eerst homogene vergelijking:

$$\frac{dy}{dx} - 2y \cos 2x = 0 \rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int 2 \cos 2x \cdot dx \rightarrow$$

$$\ln|y| = \sin 2x + C_1 \rightarrow y = \pm e^{\sin 2x + C_1} = C e^{\sin 2x}$$

Stel  $C = C(x)$  dan:  $y = C(x)e^{\sin 2x}$  en vul dit in in de inhomogene vergelijking:

$$\frac{dy}{dx} - 2y \cos 2x = -2 \sin 2x \cdot e^{\sin 2x} \rightarrow$$

$$\frac{d}{dx} (C(x) \cdot e^{\sin 2x}) - 2 \cos 2x \cdot (C(x) \cdot e^{\sin 2x}) = -2 \sin 2x \cdot e^{\sin 2x} \rightarrow$$

$$C'(x) \cdot e^{\sin 2x} + 2 \cos 2x \cdot C(x) \cdot e^{\sin 2x} - 2 \cos 2x \cdot C(x) \cdot e^{\sin 2x} = -2 \sin 2x \cdot e^{\sin 2x} \rightarrow$$

$$C'(x) \cdot e^{\sin 2x} = -2 \sin 2x \cdot e^{\sin 2x} \rightarrow C'(x) = -2 \sin 2x \rightarrow C(x) = \cos 2x + C_2$$

$$y = C(x) \cdot e^{\sin 2x} = \cos 2x \cdot e^{\sin 2x} + C_2 \cdot e^{\sin 2x}$$

3. De algemene oplossing van een homogene 2e orde LDV met constante

coëfficiënten  $y'' + py' + qy - 2y = 0$  ( $p, q$  constant) is  $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

De inhomogene vergelijking  $y'' + py' + qy - 2y = r(x)$  heeft dan als oplossing

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) \text{ met } y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

Als we nu eisen dat (1)  $u' y_1 + v' y_2 = 0$  dan moet gelden (2)  $u' y_1' + v' y_2' = r(x)$

- (1) a. Leid uit de gekoppelde vergelijkingen (1) en (2) uitdrukkingen af voor  $u'(x)$  en  $v'(x)$  en daarmee voor  $u(x)$  en  $v(x)$ . Los daarmee (b) en (c) op, door eerst de homogene en dan de inhomogene vergelijking op te lossen.

$$(1): u' = -v' \frac{y_2}{y_1} \text{ en substitueer in (2): } -v' \frac{y_2}{y_1} y_1' + v' y_2' = r(x) \rightarrow v' = \frac{y_1 r(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2}$$

Substitueer in (1):  $u' = \frac{-y_2 r(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2}$  en integreer:

$$u(x) = \int \frac{-y_2 r(x)}{W(x)} \text{ en } v(x) = \int \frac{y_1 r(x)}{W(x)} \text{ met } W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

- (1/2) b.  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$  Eerst de homogene vergelijking oplossen:

$$y'' - 2y' + y = 0 \rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \rightarrow (m-1)^2 = 0 \rightarrow m = 1$$

$\rightarrow y_c = C_1 e^x + C_2 x e^x$  Vervolgens de inhomogene vergelijking oplossen met 3a:

Stel  $y = u(x)y_1 + v(x)y_2 = u(x)e^x + v(x)x.e^x$  en met

$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^x(e^x + x.e^x) - e^x.x.e^x = e^{2x} \text{ volgt:}$$

$$u(x) = \int \frac{-x.e^x.e^x/x}{e^{2x}} = -\int dx = -x \text{ en } v(x) = \int \frac{e^x.e^x/x}{e^{2x}} = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| \text{ en dus}$$

$$y_p = uy_1 + vy_2 = -x.e^x + \ln|x|.x.e^x$$

$$y(x) = y_c + y_p = C_1 e^x + C_2 x.e^x - x.e^x + \ln|x|.x.e^x \rightarrow$$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2' x.e^x + \ln|x|.x.e^x \quad (C_2' = C_2 - 1)$$

dus - zoals te verwachten was - slechts twee integratie constanten

- (1/2) c.  $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^2}$  Eerst de homogene vergelijking oplossen:

$$y'' + 2y' + y = 0 \rightarrow m^2 + 2m + 1 = 0 \rightarrow (m+1)^2 = 0 \rightarrow m = -1$$

$\rightarrow y_c = C_1 e^{-x} + C_2 x.e^{-x}$  Vervolgens de inhomogene vergelijking oplossen met 3a:

Uit  $W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{-x}(e^{-x} - x.e^{-x}) + e^{-x}.x.e^{-x} = e^{-2x}$  volgt:

$$u(x) = \int \frac{-x.e^{-x}.e^{-x}/x^2}{e^{-2x}} = -\int \frac{1}{x} dx = -\ln|x| \text{ en } v(x) = \int \frac{e^{-x}.e^{-x}/x^2}{e^{-2x}} = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \text{ en}$$

dus

$$y_p = uy_1 + vy_2 = -\ln|x|.e^{-x} - \frac{x}{x}.e^{-x}$$

$$y(x) = y_c + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 x.e^{-x} - \ln|x|.e^{-x} - e^{-x} \rightarrow$$

$$y(x) = C_1' e^{-x} + C_2 x.e^{-x} + \ln|x|.e^{-x} \quad (C_1' = C_1 - 1)$$

(2) 4. *Laplace:*  $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$  met oplossingen  $T = XY = \begin{Bmatrix} e^{ky} \\ e^{-ky} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix}$

Beschouw nu een half-oneindige plaat met breedte 10 cm (x). Alle zijden zijn 0° behalve langs de x-as waar de temperatuur  $T = f(x) = x$ . Vind de *steady-state* temperatuurverdeling van de plaat.

$$y \rightarrow \infty \Rightarrow T \rightarrow 0 \quad \text{dus } e^{ky} \text{ termen vallen af}$$

$$x = 0 \Rightarrow T = 0 \quad \text{dus } \cos kx \text{ termen vallen af}$$

$$x = 10 \Rightarrow T = 0 \quad \text{dus } \sin kx = \sin \frac{n\pi}{10} x, \quad k = \frac{n\pi}{10} \quad (k > 0)$$

Dus blijven over de  $e^{-\frac{n\pi}{10}y} \cdot \sin \frac{n\pi}{10} x$  termen met nog te bepalen coëfficiënten.

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot e^{-\frac{n\pi}{10}y} \cdot \sin \frac{n\pi}{10} x \quad \text{Aangezien geldt: } y = 0 \Rightarrow T = f(x) = x \quad \text{krijgen we}$$

$$T_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot e^{-\frac{n\pi}{10}y} \cdot \sin \frac{n\pi}{10} x = x. \quad \text{Nu nog de } b_n \text{ bepalen}:$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l x \cdot \sin kx \cdot dx = \frac{2}{10} \int_0^{10} x \cdot \sin \frac{n\pi}{10} x \cdot dx = \frac{2}{10} \left\{ \left[ -\frac{10}{n\pi} x \cdot \cos \frac{n\pi}{10} x \right]_0^{10} + \int_0^{10} \frac{10}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{10} x \cdot dx \right\} \Rightarrow$$

$$b_n = \frac{2}{10} \left\{ \left[ -\frac{10}{n\pi} 10 \cdot \cos \frac{n\pi}{10} 10 + 0 \right] + \left[ \left( \frac{10}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{10} x \right]_0^{10} \right\} = \frac{2}{10} \left\{ \left[ -\frac{100}{n} \cdot (-1)^n \right] + [0 - 0] \right\} = \frac{20}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

$$\text{Dus: } T = \frac{20}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-\frac{n\pi}{10}y} \sin \frac{n\pi}{10} x$$

(2) 5. *Diffusie vergelijking:*  $\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t}$  met oplossingen  $u = FT = \begin{cases} e^{-k^2 \alpha^2 t} \sin kx \\ e^{-k^2 \alpha^2 t} \cos kx \end{cases}$

We hebben een staaf met lengte  $l$  cm met een *steady state*  $T$ -verdeling voor  $t < 0$  (dus Laplace), met  $T_1 = 20^\circ$  links ( $x = 0$ ) en  $T_2 = 150^\circ$  ( $x = l$ ). Vanaf  $t = 0$  houden we de temperatuur links op  $T_1 = 20^\circ$  en rechts op  $T_2 = 50^\circ$ . Vind de temperatuurverdeling  $u(x, t)$  in de staaf op tijdstip  $t$ .

*Hint: voor de staaf in BOAS met begintemperaturen (0, 100) en eindtemperaturen (0, 0)*

was de oplossing  $u = \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} \sin(n\pi x/l)$

Zie Boas blz. 630, (3.13):  $u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x = u_0 = \frac{100}{l} x$  Nu hebben we voor  $t = 0$

$$u_0 = 20 + \frac{130}{l} x, \quad u_f = 20 + \frac{30}{l} x \Rightarrow u = u_0 - u_f = 20 + \frac{130}{l} x - 20 - \frac{30}{l} x = \frac{100}{l} x$$

dus  $u$  is identiek aan (3.13), en we hoeven aan (3.15) alleen nog maar  $u_f$  toe te voegen:

$$u = 20 + \frac{30}{l} x + \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} \sin(n\pi x/l)$$

(2) 6. *Snelheidsvergelijking:*  $\nabla^2 y = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ , met oplossing  $y = XT = \begin{cases} \sin kx \\ \cos kx \end{cases} \begin{cases} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{cases}$

Neem werkcollege probleem 13.3.3, de snaar die tussen 0 en  $l/4$  vastzit.

$$t = 0: \quad y_0 = f(x) = \begin{cases} \frac{8h}{l} x, & 0 < x < \frac{1}{8} l \\ 2h - \frac{8h}{l} x, & \frac{1}{8} l < x < \frac{1}{4} l \\ 0, & \frac{1}{4} l < x < l \end{cases}$$

$$t = 0: \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \text{ dus } \sin \omega t \text{ termen vallen af, want } \frac{\partial \sin \omega t}{\partial t} \neq 0$$

$$x = 0: \quad y = 0 \text{ dus } \cos kx \text{ termen vallen af}$$

$$x = l: \quad y = 0 \text{ dus } \sin kx = \sin \frac{n\pi}{l} x$$

Kortom,  $y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \cos \frac{n\pi v}{l} t = f(x)$  dus:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{l} \int_0^{\frac{1}{8}l} \frac{8h}{l} x \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot dx - \int_{\frac{1}{8}l}^{\frac{1}{4}l} \frac{8h}{l} x \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot dx + 2h \int_{\frac{1}{8}l}^{\frac{1}{4}l} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot dx \Rightarrow \\
 b_n &= \frac{16h}{l} \left\{ \left[ -\frac{1}{l} \frac{l}{n\pi} x \cdot \cos \frac{n\pi}{l} x \right]_0^{\frac{1}{8}l} + \int_0^{\frac{1}{8}l} \frac{1}{l} \frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} x \cdot dx \right\} \\
 &\quad - \frac{16h}{l} \left\{ \left[ -\frac{1}{l} \frac{l}{n\pi} x \cdot \cos \frac{n\pi}{l} x \right]_{\frac{1}{8}l}^{\frac{1}{4}l} + \int_{\frac{1}{8}l}^{\frac{1}{4}l} \frac{1}{l} \frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} x \cdot dx \right\} + \frac{4h}{l} \left[ -\frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} x \right]_{\frac{1}{8}l}^{\frac{1}{4}l} \Rightarrow \\
 b_n &= \frac{16h}{l} \left\{ \left[ -\frac{1}{n\pi} \cdot \frac{l}{8} \cdot \cos \frac{n\pi}{8} + 0 \right] + \left[ \frac{l}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{l} x \right]_0^{\frac{1}{8}l} \right\} \\
 &\quad + \frac{16h}{l} \left\{ \left[ \frac{1}{n\pi} \cdot \frac{l}{4} \cdot \cos \frac{n\pi}{4} - \frac{1}{n\pi} \cdot \frac{l}{8} \cdot \cos \frac{n\pi}{8} \right] + \left[ \frac{l}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{l} x \right]_{\frac{1}{8}l}^{\frac{1}{4}l} \right\} + \frac{4h}{l} \left[ -\frac{l}{n\pi} \left( \cos \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{n\pi}{8} \right) \right] \Rightarrow
 \end{aligned}$$

Aangezien alle cosinus termen wegvallen (check!), krijgen we :

$$b_n = \frac{16h}{(n\pi)^2} \left( 2 \sin \frac{n\pi}{8} - \sin \frac{n\pi}{4} \right) \text{ zodat}$$

$$y(x,t) = \frac{16h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \cos \frac{n\pi v}{l} t \text{ met } B_n = \left( 2 \sin \frac{n\pi}{8} - \sin \frac{n\pi}{4} \right) / n^2$$