DIVA: End-term test

Schrijf je naam en schrijf netjes. De punten per opgave staan vetgedrukt

(1) 1. Gegeven is de niet-lineaire, wel separeerbare, 1e orde differentiaalvergelijking

$y^2 t\frac{dy}{dt} - t + 1 = 0$ met $t > 0$

Los deze vergelijking op, met als randvoorwaarde $y(1) = 3$

$$y^2 t\frac{dy}{dt} - t + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad y^2\frac{dy}{dt} = \frac{t-1}{t} \quad \rightarrow \quad \int y^2 dy = \int (1 - \frac{1}{t})dt \quad \rightarrow \quad \tfrac{1}{3}y^3 = t - \ln t + C$$

Randvoorwaarde geeft: $y(1) = 3 \quad \rightarrow \quad \tfrac{1}{3}3^3 = 1 - \ln 1 + C \quad \rightarrow \quad C = 8$

Ofwel $y(t) = \sqrt[3]{3(t - \ln t + 8)}$

(1) 2. We hebben de volgende inhomogene 1e orde LDV:

$$\frac{dy}{dx} - 2y\cos 2x + 2\sin 2x.e^{\sin 2x} = 0$$

Los eerst de homogene vergelijking op. Stel vervolgens de integratie constante C als een functie van x: C(x). Los daarmee de inhomogene vergelijking op.

Eerst homogene vergelijking:

$$\frac{dy}{dx} - 2y\cos 2x = 0 \quad \rightarrow \quad \int \frac{1}{y}dy = \int 2\cos 2x.dx \quad \rightarrow$$

$$\ln|y| = \sin 2x + C_1 \quad \rightarrow \quad y = \pm e^{\sin 2x + C_1} = Ce^{\sin 2x}$$

Stel $C = C(x) \quad dan: \quad y = C(x)e^{\sin 2x}$ en vul dit in in de inhomogene vergelijking:

$$\frac{dy}{dx} - 2y\cos 2x = -2\sin 2x.e^{\sin 2x} \quad \rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(C(x).e^{\sin 2x}\right) - 2\cos 2x.\left(C(x).e^{\sin 2x}\right) = -2\sin 2x.e^{\sin 2x} \quad \rightarrow$$

$$C'(x).e^{\sin 2x} + 2\cos 2x.C(x)e^{\sin 2x} - 2\cos 2x.C(x).e^{\sin 2x} = -2\sin 2x.e^{\sin 2x} \quad \rightarrow$$

$$C'(x).e^{\sin 2x} = -2\sin 2x.e^{\sin 2x} \quad \rightarrow \quad C'(x) = -2\sin 2x \quad \rightarrow \quad C(x) = \cos 2x + C_2$$

$$y = C(x).e^{\sin 2x} = \cos 2x.e^{\sin 2x} + C_2.e^{\sin 2x}$$

3. De algemene oplossing van een homogene 2e orde LDV met constante coëfficienten $y'' + py' + qy - 2y = 0$ (p,q constant) is $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

De inhomogene vergelijking $y'' + py' + qy - 2y = r(x)$ heeft dan als oplossing

$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ met $y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$

Als we nu eisen dat (1) $u'y_1 + v'y_2 = 0$ dan moet gelden (2) $u'y_1' + v'y_2' = r(x)$

(1) a. Leid uit de gekoppelde vergelijkingen (1) en (2) uitdrukkingen af voor *u'(x)* en *v'(x)* en daarmee voor *u(x)* en *v(x)*. Los daarmee (b) en (c) op, door eerst de homogene en dan de inhomogene vergelijking op te lossen.

(1): $u' = -v'\dfrac{y_2}{y_1}$ en substitueer in (2): $-v'\dfrac{y_2}{y_1}y_1' + v'y_2' = r(x) \;\rightarrow\; v' = \dfrac{y_1 r(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2}$

Substitueer in (1): $u' = \dfrac{-y_2 r(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2}$ en integreer:

$u(x) = \int \dfrac{-y_2 r(x)}{W(x)}$ en $v(x) = \int \dfrac{y_1 r(x)}{W(x)}$ met $W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2$

(½) b. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$ Eerst de homogene vergelijking oplossen:

$y'' - 2y' + y = 0 \quad\rightarrow\quad m^2 - 2m + 1 = 0 \quad\rightarrow\quad (m-1)^2 = 0 \quad\rightarrow\quad m = 1$

$\rightarrow\quad y_c = C_1 e^x + C_2 x.e^x$ Vervolgens de inhomogene vergelijking oplossen met 3a:

Stel $y = u(x)y_1 + v(x)y_2 = u(x).e^x + v(x).x.e^x$ en met

$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^x(e^x + x.e^x) - e^x.x.e^x = e^{2x}$ volgt:

$u(x) = \int \dfrac{-x.e^x.\cancel{e^x}/\cancel{x}}{e^{2x}} = -\int dx = -x$ en $v(x) = \int \dfrac{e^x.\cancel{e^x}/\cancel{x}}{e^{2x}} = \int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x|$ en dus

$y_p = uy_1 + vy_2 = -x.e^x + \ln|x|.x.e^x$

$y(x) = y_c + y_p = C_1 e^x + C_2 x.e^x - x.e^x + \ln|x|.x.e^x \quad\rightarrow$

$y(x) = C_1 e^x + C_2' x.e^x + \ln|x|.x.e^x \quad (C_2' = C_2 - 1)$

dus - zoals te verwachten was - slechts <u>twee</u> integratie constanten

(½) c. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x^2}$ Eerst de homogene vergelijking oplossen:

$y'' + 2y' + y = 0 \quad\rightarrow\quad m^2 + 2m + 1 = 0 \quad\rightarrow\quad (m+1)^2 = 0 \quad\rightarrow\quad m = -1$

$\rightarrow\quad y_c = C_1 e^{-x} + C_2 x.e^{-x}$ Vervolgens de inhomogene vergelijking oplossen met 3a:

Uit $W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{-x}(e^{-x} - x.e^{-x}) + e^{-x}.x.e^{-x} = e^{-2x}$ volgt:

$u(x) = \int \dfrac{-x.e^{-x}\,\cancel{e^{-x}}/\cancel{x^2}}{e^{-2x}} = -\int \dfrac{1}{x}dx = -\ln|x|$ en $v(x) = \int \dfrac{e^{-x}.\cancel{e^{-x}}/\cancel{x^2}}{e^{-2x}} = \int \dfrac{1}{x^2}dx = -\dfrac{1}{x}$ en

dus

$$y_p = uy_1 + vy_2 = -\ln|x|.e^{-x} - \frac{x}{x}.e^{-x}$$

$$y(x) = y_c + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 x.e^{-x} - \ln|x|.e^{-x} - e^{-x} \quad \rightarrow$$

$$y(x) = C_1^{'} e^{-x} + C_2 x.e^{-x} + \ln|x|.e^{-x} \quad (C_1^{'} = C_1 - 1)$$

(2) 4. *Laplace:* $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ met oplossingen $T = XY = \begin{Bmatrix} e^{ky} \\ e^{-ky} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix}$

Beschouw nu een half-oneindige plaat met breedte 10 cm (x). Alle zijden zijn 0° behalve langs de x-as waar de temperatuur $T = f(x) = x$. Vind de *steady-state* temperatuurverdeling van de plaat.

$y \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad T \rightarrow 0$ dus e^{ky} termen vallen af

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 0$ dus *cos kx* termen vallen af

$x = 10 \quad \Rightarrow \quad T = 0$ dus $\sin kx = \sin \frac{n\pi}{10} x, \quad k = \frac{n\pi}{10} \quad (k > 0)$

Dus blijven over de $e^{-\frac{n\pi}{10}y}.\sin \frac{n\pi}{10} x$ termen met nog te bepalen coëfficienten.

$T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.e^{-\frac{n\pi}{10}y}.\sin \frac{n\pi}{10} x$ Aangezien geldt: $y = 0 \quad \Rightarrow \quad T = f(x) = x$ krijgen we

$T_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.e^{-\frac{n\pi}{10}y}.\sin \frac{n\pi}{10} x = x.$ Nu nog de b_n bepalen":

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l x.\sin kx.dx = \frac{2}{10}\int_0^{10} x.\sin \frac{n\pi}{10} x.dx = \frac{2}{10}\left\{\left[-\frac{10}{n\pi} x.\cos \frac{n\pi}{10} x\right]_0^{10} + \int_0^{10} \frac{10}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{10} x.dx\right\} \quad \Rightarrow$$

$$b_n = \frac{2}{10}\left\{\left[-\frac{10}{n\pi} 10.\cos \frac{n\pi}{10} 10 + 0\right] + \left[\left(\frac{10}{n\pi}\right)^2 \sin \frac{n\pi}{10} x\right]_0^{10}\right\} = \frac{2}{10}\left\{\left[-\frac{100}{n}.(-1)^n\right] + [0 - 0]\right\} = \frac{20}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

Dus: $T = \frac{20}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-\frac{n\pi}{10}y} \sin \frac{n\pi}{10} x$

(2) 5. *Diffusie vergelijking:* $\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t}$ met oplossingen $u = FT = \begin{Bmatrix} e^{-k^2\alpha^2 t}\sin kx \\ e^{-k^2\alpha^2 t}\cos kx \end{Bmatrix}$

We hebben een staaf met lengte l cm met een *steady state* T-verdeling voor $t < 0$ (dus Laplace), met $T_1 = 20°$ links ($x = 0$) en $T_2 = 150°$ ($x = l$). Vanaf $t = 0$ houden we de temperatuur links op $T_1 = 20°$ en rechts op $T_2 = 50°$. Vind de temperatuurverdeling $u(x,t)$ in de staaf op tijdstip t.

Hint: voor de staaf in BOAS met begintemperaturen (0,100) en eindtemperaturen (0,0) was de oplossing $u = \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t}\sin(n\pi x/l)$

Zie Boas blz. 630, (3.13): $u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.\sin\frac{n\pi}{l}x = u_0 = \frac{100}{l}x$ Nu hebben we voor $t = 0$

$$u_0 = 20 + \frac{130}{l}x,\quad u_f = 20 + \frac{30}{l}x \quad\Rightarrow\quad u = u_0 - u_f = 20 + \frac{130}{l}x - 20 - \frac{30}{l}x = \frac{100}{l}x$$

dus u is identiek aan (3.13), en we hoeven aan (3.15) alleen nog maar u_f toe te voegen:

$$u = 20 + \frac{30}{l}x + \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t}\sin(n\pi x/l)$$

(2) 6. *Snelheidsvergelijking:* $\nabla^2 y = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, met oplossing $y = XT = \begin{Bmatrix}\sin kx \\ \cos kx\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin \omega t \\ \cos \omega t\end{Bmatrix}$

Neem werkcollege probleem 13.3.3, de snaar die tussen 0 en l/4 vastzit.

$t = 0$: $$y_0 = f(x) = \begin{cases} \frac{8h}{l}x, & 0 < x < \frac{1}{8}l \\ 2h - \frac{8h}{l}x, & \frac{1}{8}l < x < \frac{1}{4}l \\ 0, & \frac{1}{4}l < x < l \end{cases}$$

$t = 0$: $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$ dus sin wt termen vallen af, want $\frac{\partial \sin\omega t}{\partial t} \neq 0$

$x = 0$: $y = 0$ dus cos kx termen vallen af

$x = l$: $y = 0$ dus $\sin kx = \sin\frac{n\pi}{l}x$

Kortom, $\quad y=\sum_{n=1}^{\infty} b_n.\sin\frac{n\pi}{l}x.\cos\frac{n\pi v}{l}t = f(x)$ dus:

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^{1/8\,l}\frac{8h}{l}x.\sin\frac{n\pi}{l}x.dx-\int_{1/8\,l}^{1/4\,l}\frac{8h}{l}x.\sin\frac{n\pi}{l}x.dx+2h\int_{1/8\,l}^{1/4\,l}\sin\frac{n\pi}{l}x.dx \quad\Rightarrow$$

$$b_n=\frac{16h}{l}\left\{\left[-\frac{1}{l}\frac{l}{n\pi}x.\cos\frac{n\pi}{l}x\right]_0^{1/8\,l}+\int_0^{1/8\,l}\frac{1}{l}\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x.dx\right\}$$

$$-\frac{16h}{l}\left\{\left[-\frac{1}{l}\frac{l}{n\pi}x.\cos\frac{n\pi}{l}x\right]_{1/8\,l}^{1/4\,l}+\int_{1/8\,l}^{1/4\,l}\frac{1}{l}\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x.dx\right\}+\frac{4h}{l}\left[-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\right]_{1/8\,l}^{1/4\,l} \quad\Rightarrow$$

$$b_n=\frac{16h}{l}\left\{\left[-\frac{1}{n\pi}.\frac{l}{8}.\cos\frac{n\pi}{8}+0\right]+\left[\frac{l}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{l}x\right]_0^{1/8\,l}\right\}$$

$$+\frac{16h}{l}\left\{\left[\frac{1}{n\pi}.\frac{l}{4}.\cos\frac{n\pi}{4}-\frac{1}{n\pi}.\frac{l}{8}.\cos\frac{n\pi}{8}\right]+\left[\frac{l}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{l}x\right]_{1/8\,l}^{1/4\,l}\right\}+\frac{4h}{l}\left[-\frac{l}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{4}-\cos\frac{n\pi}{8}\right)\right] \quad\Rightarrow$$

Aangezien alle cosinus termen wegvallen (check !), krijgen we :

$$b_n=\frac{16h}{(n\pi)^2}(2\sin\frac{n\pi}{8}-\sin\frac{n\pi}{4}) \quad \text{zodat}$$

$$y(x,t)=\frac{16h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n.\sin\frac{n\pi}{l}x.\cos\frac{n\pi v}{l}t \quad \text{met} \quad B_n=(2\sin\frac{n\pi}{8}-\sin\frac{n\pi}{4})/n^2$$