DIVA: Mid-term test 1a (March 2011)

Schrijf je naam en schrijf netjes. Er zijn 10 opgaven, allemaal 1 punt waard

1. Vind de limiet van de rij $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n+1}}{n}$ (1.2.3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n+1}}{n}\approx\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n^{\frac{1}{2}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}}=0$$

2. Gebruik de divergentie test ('preliminary test' in Boas) om te beslissen of de volgende reeks divergent is of verder getest moet worden: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n+3^n}$ (1.5.9)

$$\text{Let } a_n=\frac{3^n}{2^n+3^n}=\frac{1}{\frac{2^n}{3^n}+1}=\frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}=\frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1}{1+0}=1\neq 0$$

Omdat de limiet niet gelijk is aan nul, divergeert de reeks. Niet verder testen dus.

3. Gebruik de ratio test om te bepalen of de volgende reeks convergeert:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{(2n)!}}{n!}$ (1.6.29)

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{(2n+2)(2n+1)(2n)!}}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{(2n+2)(2n+1)}.\sqrt{(2n)!}}{(n+1)n!}\frac{n!}{\sqrt{(2n)!}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{4n^2}}{(n+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n}=2$$

De reeks divergeert dus.

4. Vind het convergentie interval voor de machtreeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{x^n}$ (1.10.22)

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+1}}.\frac{x^n}{(-1)^n n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|-\frac{n+1}{x}\right|=\infty$$ dus voor geen enkele x

5. Als je weet dat de Taylor reeks voor e^x rond x = 0 is: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

en dat voor de eerste twee termen $\tan x$ geldt $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + ...$

wat zijn dan de termen (t/m x^4) van de Taylor reeks rond $x = 0$ voor $e^{\tan x}$?

Voor de oplossing zie Example 2 op blz. 29-30 van Boas

6. a. Schrijf in de vorm $a+bi$: $\bar{z}/z$ als $z = 2-3i$ (2.5.24)

$$\frac{2-3i}{2+3i} = \frac{(2-3i)}{(2+3i)}\frac{(2-3i)}{(2-3i)} = \frac{4-12i+9i^2}{4-9i^2} = \frac{-5-12i}{13} = -\frac{5}{13} - \frac{12}{13}i$$

b. Bepaal de absolute waarde van $\frac{3i}{i-\sqrt{3}}$ (2.5.30)

$$\left|\frac{3i}{i-\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{3}{\sqrt{1+3}}\right| = \frac{3}{2}$$

7. Los op en schets in het complexe vlak de volgende vergelijkingen

(a) $|x+iy| = y - ix$ (2.5.50) (b) $\operatorname{Im} z < 3$ (2.5.61)

(a) $\sqrt{x^2+y^2} = y - ix \Rightarrow x = 0, y \geq 0$ (b) Halfvlak, $y<3$

8. Test de complexe reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+2i)^n}{n!}$ voor convergentie (2.6.12)

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3+2i)^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{(3+2i)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3+2i}{n+1}\right| = 0$$ dus convergeert altijd.

9. Vind de convergentie cirkel voor de complexe machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 z^n}{(2n)!}$ (2.7.12)

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{((n+1)!)^2 z^{n+1}}{(2n+2)!}.\frac{(2n)!}{(n!)^2 z^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2 z}{(2n+2)(2n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2 z}{4n^2}\right| = \left|\frac{z}{4}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad |z| < 4$$

10. Vind alle complexe wortels voor $z = \sqrt[3]{2i-2}$ (2.10.22)

Schrijf als $\sqrt[3]{re^{i\vartheta}}$:

Absolute waarde van $z = 2i-2$ is $\sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ dus $r^{1/3} = (\sqrt{8})^{1/3} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{2}$

$\sqrt[3]{e^{i\vartheta}} = e^{\frac{1}{3}i(\frac{3}{4}\pi + 2n\pi)} = e^{i(\frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3}n\pi)}$ dus oplossingen $\vartheta = \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi, \frac{1}{4}\pi + \frac{4}{3}\pi$

ofwel $1+i, \cos 165^\circ + i\sin 165^\circ, \cos 285^\circ + i\sin 285^\circ$ (of sin, cos in radialen)