9C02 - 1301

**DIVA: End-term test**

*Schrijf je naam en schrijf netjes. De punten per opgave staan vetgedrukt*

**(1)** 1. Gegeven is de niet-lineaire, wel separeerbare, 1e orde differentiaalvergelijking

$$y^2 t\frac{dy}{dt} - t + 1 = 0 \text{ met } t > 0$$

Los deze vergelijking op, met als randvoorwaarde $y(1) = 3$

**(1)** 2. We hebben de volgende inhomogene 1e orde LDV:

$$\frac{dy}{dx} - 2y\cos 2x + 2\sin 2x . e^{\sin 2x} = 0$$

Los eerst de homogene vergelijking op. Stel vervolgens de integratie constante C als een functie van x: C(x). Los daarmee de inhomogene vergelijking op.

3. De algemene oplossing van een homogene 2e orde LDV met constante coëfficienten $y'' + py' + qy - 2y = 0$ ($p,q$ constant) is $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

De inhomogene vergelijking $y'' + py' + qy - 2y = r(x)$ heeft dan als oplossing $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ met $y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$

Als we nu eisen dat (1) $u'y_1 + v'y_2 = 0$ dan moet gelden (2) $u'y_1' + v'y_2' = r(x)$

**(1)** a. Leid uit de gekoppelde vergelijkingen (1) en (2) uitdrukkingen af voor $u'(x)$ en $v'(x)$ en daarmee voor $u(x)$ en $v(x)$. Los daarmee (b) en (c) op, door eerst de homogene en dan de inhomogene vergelijking op te lossen[1]

**(½)** b. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$ **(½)** c. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x^2}$

**(2)** 4. *Laplace:* $\nabla^2 T = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ met oplossingen $T = XY = \begin{Bmatrix} e^{ky} \\ e^{-ky} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix}$

Beschouw nu een half-oneindige plaat met breedte 10 cm (x). Alle zijden zijn 0° behalve langs de x-as waar de temperatuur $T = f(x) = x$. Vind de *steady-state* temperatuurverdeling van de plaat.

*Antwoord:* $T = \dfrac{20}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-n\pi y/10}\sin(n\pi x/10)$

---

[1] Als je hier niet uit komt, vraag dan de oplossing aan de surveillant, tegen inlevering van 1 punt

(2) 5. *Diffusie vergelijking:* $\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t}$ met oplossingen $u = FT = \begin{Bmatrix} e^{-k^2\alpha^2 t}\sin kx \\ e^{-k^2\alpha^2 t}\cos kx \end{Bmatrix}$

We hebben een staaf met lengte $l$ cm met een ***steady state*** $T$-verdeling voor $t < 0$ (dus Laplace), met $T_1 = 20°$ links ($x = 0$) en $T_2 = 150°$ ($x = l$). Vanaf $t = 0$ houden we de temperatuur links op $T_1 = 20°$ en rechts op $T_2 = 50°$. Vind de temperatuurverdeling $u(x,t)$ in de staaf op tijdstip $t$.

*Hint: voor de staaf in BOAS met begintemperaturen (0,100) en eindtemperaturen (0,0) was de oplossing* $u = \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t}\sin(n\pi x/l)$

(2) 6. *Snelheidsvergelijking:* $\nabla^2 y = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, met oplossing $y = XT = \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{Bmatrix}$

In de werkcollege opgave 14.2.2 ging het om een snaar met een beginsnelheid van nul (*plucked string*), die vastzit op $x = 0$ en $x = l/2$. De verplaatsing $y = f(x,t)$ wordt dan gegeven door:

$$y = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi vt}{l} \qquad B_n = (2\sin n\pi/4 - \sin n\pi/2)/n^2$$

Los hetzelfde probleem op als de snaar vastzit tussen $x = 0$ en $x = l/4$