

DIVA: Mid-term test 1b

Schrijf je naam en schrijf netjes. Er zijn 6 opgaven; opgaven 1-3 geven 1 punt, opgaven 4-5 geven 2 punten, en opgave 6 is 3 punten

1. Gegeven is de complexe periodische functie $z = f(t) = 5e^{-it/3}$

Laat zien dat $x(t) = \operatorname{Re} z$ en $y(t) = \operatorname{Im} z$ een simpele harmonische beweging ondergaan, en bepaal de amplitude, periode, frequentie en amplitude van de snelheid van de beweging.

2. Vind de gemiddelde waarde van $\sin 2x$ over $(\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6})$

3. Als je weet dat de Fourier reeks van

$$\begin{aligned} f(x) &= 1, & -\pi < x < 0 \\ f(x) &= 0, & -0 < x < \pi \end{aligned} \quad \text{gelijk is aan } f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

wat is dan de Fourier reeks voor $\begin{aligned} g(x) &= 0, & -\pi < x < 0 \\ g(x) &= 1, & -0 < x < \pi \end{aligned} ?$

Schets beide functies over enkele perioden, en leidt de eerste term van $g(x)$ ($\frac{1}{2}a_0$) grafisch af uit de schets van deze functie. Klopt dit met je antwoord ?

4. We kunnen de reële sinussen en cosinussen van de Fourier reeks ook in

complexe vorm schrijven: $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}$ met $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$

Bepaal nu de c_n van de functie $g(x)$ uit de opgave 3 hierboven, en laat zien dat de complexe vorm wederom gelijk is aan je antwoord uit opgave 3.

5. We kunnen in plaats van over een periode van 2π een Fourier reeks ook ontwikkelen over een willekeurige periode $\lambda = 2l$. We krijgen dan bv. voor a_n :

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx$$

Als $f(x)$ even dan wel oneven is, wat worden de a_n dan ?

Bepaal hiermee nu de Fourier reeks voor de functie:

$f(x) = x^2$, $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. Schets de functie en herhaal hem enkele keren.

Als het goed is, krijg je eruit: $f(x) = \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos 2n\pi x$

Geldt dat voor alle n ? Schrijf de eerste 4 termen uit.