Lineaire Algebra en Vector Analyse (GEO2-1201)

6 november 2008, 13.00-16.00

DEEL 1

Toon ook de tussenstappen.

1. (a) Los (indien mogelijk) het volgende stelsel vergelijken op:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 5y & - & z & = & 3 \\ & & 4y & + & z & = & 5 \\ x & & & - & 2z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}$$

   (b) Veronderstel dat de vergelijkingen vlakken representeren.
   Indien de oplossing bestaat, representeert deze dan een punt, een lijn, of een vlak?

2. Gebruik de regel van Cramer om x en y op te lossen voor de volgende twee vergelijkingen.

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 3 \\ x & - & 2y & = & 5 \end{array}$$

3. (a) Bepaal de afstand van punt P $(1, -2, 3)$ tot het vlak $3x - 2y + z = -1$
   (b) Bepaal de afstand van punt A $(1, 2, 3)$ tot de lijn die door de punten $(-1, 3, 7)$ en $(-1, -2, 7)$ gaat.

4. Gegeven is de matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

   (a) Bereken de inverse van A.
   (b) Gebruik A^{-1} om (x, y, z) op te lossen voor het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & & & = & 1 \\ -2x & - & 4y & + & 3z & = & 0 \\ 5x & + & 4y & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

5. A en B zijn symmetrische matrices ($A^T = A$, $B^T = B$). $C = AB - BA$.
   Laat zien dat C antisymmetrisch is ($C^T = -C$) m.b.v. index notatie.

DEEL 2

Toon ook de tussenstappen.

1. De matrix M is gegeven als

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

   (a) Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van M.

   (b) Geef een diagonaalmatrix van eigenwaarden, D, en de bijbehorende matrix van eigenvectoren, C.
   Wat is de relatie tussen M, C en D?

2. Een punt is gegeven in het Cartesisch coördinatenstelsel (x, y, z) als $(-6, -6, -6\sqrt{2})$.
   Geef de coördinaten van het punt in het cilindrisch coördinatenstelsel (r, θ, z) en het sferisch coördinatenstelsel (r, θ, ϕ).
   Geef ook een schets waarin de hoeken van het sferisch coördinatenstelsel aangegeven zijn.

3. Bereken het volume tussen de vlakken $z = 3x^2 + 3y + 6$ en $z = 3x^2 + 7y + 8$ en boven de driehoek in het (x, y)-vlak met hoekpunten $(0, 0)$, $(1, 1)$, en $(0, 2)$.

4. (a) Bereken $\nabla\phi$ en $\nabla^2\phi$ met $\phi = z^2 - 3xy$.
   Bereken tevens de richtingsafgeleide (directional derivative) van ϕ in het punt $(1, 2, 3)$ in de richting $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

   (b) Bereken $\nabla \cdot \mathbf{V}$ en $\nabla \times \mathbf{V}$ met $\mathbf{V} = y\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
   Is $\mathbf{V}$ conservatief? Verklaar.

5. (a) Geef de stelling van Gauss (het divergentie theorema) en de stelling van Stokes.

   (b) Bereken $\int\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ met $\mathbf{F} = (y^2 - x^2)\mathbf{i} + (2xy - y)\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ over het oppervlak van een cilinder begrensd door $x^2 + y^2 = 16$, $z = 3$ en $z = -3$.