Lithosfeerdynamica
Voortgangstoets #1, 26 februari 2013, 09.00-10.00 uur

- Introductie
- Warmtehuishouding van oceanische en continentale lithosfeer

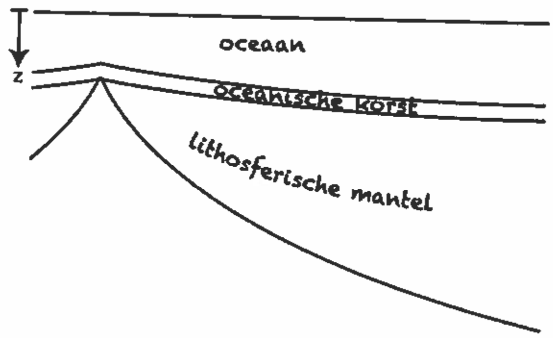
Opgave 1.
Voor het plaatmodel wordt de geotherm gegeven door

$$T(z,t) = T_a\left[\left(1-\frac{z}{L}\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\kappa t}{L^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\right]$$

De dichtheid van mantelgesteente is afhankelijk van de temperatuur volgens;

$$\rho(T) = \rho_a[1-\alpha(T-T_a)]$$

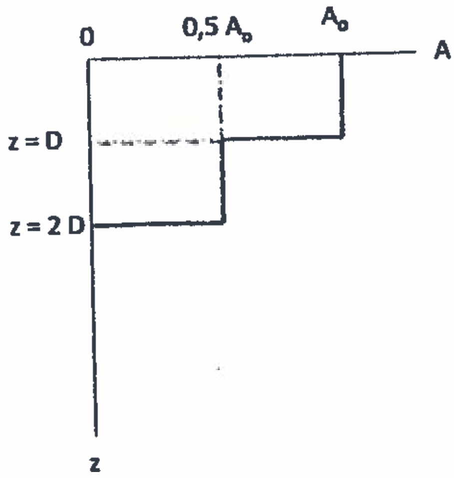
De dichtheid van de oceanische korst ρ_c is niet temperatuurafhankelijk. De diepte van de mid-oceanische rug is 2.6 km. Gebruik de geometrie in Figuur 1 om een uitdrukking te vinden voor de oceaandiepte boven *oude* oceanische lithosfeer.



Figuur 1

Opgave 2.
Gegeven: een continentaal gebied, met oppervlaktetemperatuur T_o en oppervlaktewarmtestroom q_o, en een warmteproductie aan het oppervlak gelijk aan A_o. Stel dat informatie over de structuur van de ondergrond aanleiding is aan te nemen dat de verdeling van de warmteproductie is als in onderstaande figuur (een laag met dikte D en uniforme warmteproductie A_o en daaronder een even dikke laag met een warmteproductie 0,5 A_o).

Z.O.Z.



a) Welke exponentiele verdeling van de warmteproductie (afnemend met diepte) zou qua totale warmteproductie overeenkomen met (d.w.z. gelijk zijn aan) deze verdeling?

b) Leid een uitdrukking af voor de temperatuurverdeling $T(z)$ behorend bij de exponentiele verdeling van warmteproductie bedoeld onder **a)**.

Voortgangstoets #1

Opgave 1

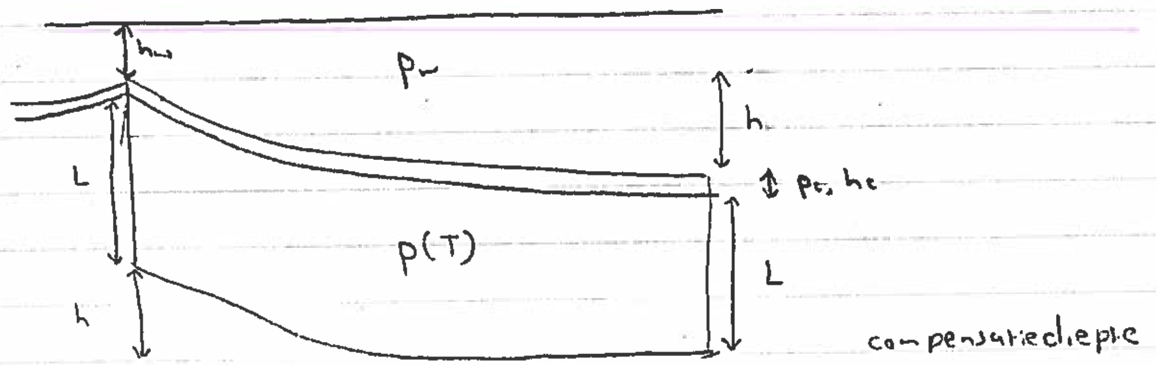
Voor oude lithosfeer geldt dat $t \to \infty$. Omdat $\lim_{t\to\infty} \exp\left(\frac{-n^2\pi^2\kappa t}{L^2}\right) = 0$ geldt als temperatuur verdeling voor oude lithosfeer

$$T(z) = T_a[1 - z/L]$$

en voor de dichtheid

$$\rho = \rho_a[1 - \alpha(T - T_a)]$$
$$= \rho_a[1 - \alpha\{T_a[1 - z/L] - T_a\}]$$
$$= \rho_a[1 + \alpha T_a z/L]$$

Voor de diepte van de oceaan bodem gebruiken we lokale isostasie t.o.v. de rug. Als compensatie diepte gebruiken we de onderkant van de oceanische lithosfeer (welke immers constant is in het plaat model)



$$P_{rug} = P_{oude\ lithosfeer}$$

$$\rho_w g h_w + \rho_c g h_c + \rho_a g (L + h) = \rho_w g (h_w + h) + \rho_c g h_c + \int_0^L \rho(T) g\, dz$$

eerst evalueren we de integraal:

$$\int_0^L \rho(T) g\, dz = \int_0^L \rho_a[1 + \alpha T_a z/L] g\, dz$$

$$= \rho_a g L + \rho_a g \alpha T_a \frac{L}{2}$$ en dus:

$$\rho_a(L + h) = \rho_w h + \rho_a L + \rho_a \alpha T_a L/2$$
$$h(\rho_a - \rho_w) = \rho_a \alpha T_a L/2$$
$$h = \frac{\rho_a \alpha T_a L}{2(\rho_a - \rho_w)}$$

De oceaandiepte is dus:

$$h_w + h = h_w + \frac{\rho_a \alpha T_a L}{2(\rho_a - \rho_w)}$$

Opgave 2

a) De warmtevergelijking is:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{A}{k}$$

met $A = \begin{cases} A_0 & 0 < z < D \\ \frac{1}{2} A_0 & D < z < 2D \end{cases}$

en $T(z=0) = T_0$

$q(z=0) = q_0$

$T(z=D) = \text{continu}$

De totale warmteproductie (dus geïntegreerd over de diepte) is

$$\int_0^{2D} A(z)\,dz = \int_0^{D} A_0\,dz + \int_D^{2D} \tfrac{1}{2} A_0\,dz$$

$$= A_0 z \Big|_0^D + \tfrac{1}{2} A_0 z \Big|_D^{2D}$$

$$= A_0 D + \tfrac{1}{2} A_0 (2D - D)$$

$$= \tfrac{3}{2} A_0 D$$

Voor een exponentiele verdeling $A(z) = A_0 \exp(-z/L)$ is de totale warmte productie

$$\int_0^{\infty} A(z)\,dz = \int_0^{\infty} A_0 \exp(-z/L)\,dz = -A_0 L \exp(-z/L) \Big|_0^{\infty}$$

$$= A_0 L$$

Het twee-laags model en het exponentiele model geven dus dezelfde warmteproductie als

$$\tfrac{3}{2} A_0 D = A_0 L$$

$$L = \tfrac{3}{2} D \qquad \text{Dus: } A = A_0 \exp(-2z/3D)$$

b) De warmtevergelijking is

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{A_0}{k} \exp(-z/L)$$

Deze primitiveren we 2x om de temperatuur verdeling te krijgen

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{A_0 L}{k} \exp(-z/L) + c_1$$

$$T(z) = -\frac{A_0 L^2}{k} \exp(-z/L) + c_1 z + c_2$$

Hierin zijn c_1 en c_2 integratieconstanten welke bepaald worden uit de randvoorwaarden.

$T(z=0) = T_0$ (I)

$q(z=0) = -q_0$ (II) (de warmtestroom is gericht in de negatieve z-richting)

uit (I) volgt

$T_0 = -\dfrac{A_0 L^2}{k} + c_2$ dus $c_2 = T_0 + \dfrac{A_0 L^2}{k}$

dus $T(z) = [1 - \exp(-z/L)]\dfrac{A_0 L^2}{k} + c_1 z + T_0$

$q = -k\dfrac{\partial T}{\partial z} = -A_0 L^2 \left[\frac{1}{L}\exp(-z/L)\right] - k c_1$

$q(z=0) = -q_0 = -A_0 L - k c_1$ dus $c_1 = (q_0 - A_0 L)/k$

dus. $T(z) = \dfrac{A_0 L^2}{k}\left[1 - \exp\left(\dfrac{-z}{L}\right)\right] + \dfrac{q_0 - A_0 L}{k} z + T_0$

verder geldt nog $L = 3/2\, D$:

$T(z) = \dfrac{9 A_0 D^2}{4k}\left[1 - \exp\left(\dfrac{-2z}{3D}\right)\right] + \dfrac{q_0 - \frac{3}{2} A_0 D}{k} z + T_0$