

Lithosfeerdynamica
Voortgangstoets #1, 26 februari 2013, 09.00-10.00 uur

- Introductie
- Warmtehuishouding van oceanische en continentale lithosfeer

Opgave 1.

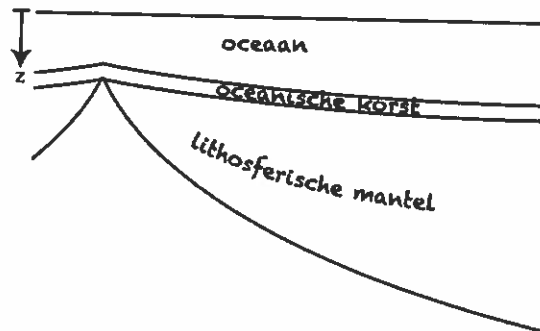
Voor het plaatmodel wordt de geotherm gegeven door

$$T(z, t) = T_a \left[\left(1 - \frac{z}{L}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 kt}{L^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \right]$$

De dichtheid van mantelgesteente is afhankelijk van de temperatuur volgens;

$$\rho(T) = \rho_a [1 - \alpha(T - T_a)]$$

De dichtheid van de oceanische korst ρ_c is niet temperatuurafhankelijk. De diepte van de mid-oceanische rug is 2.6 km. Gebruik de geometrie in Figuur 1 om een uitdrukking te vinden voor de oceaandiepte boven *oude* oceanische lithosfeer.

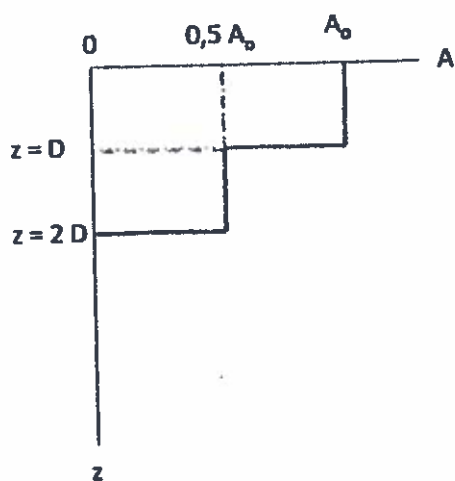


Figuur 1

Opgave 2.

Gegeven: een continentaal gebied, met oppervlaktetemperatuur T_o en oppervlaktewarmtestroom q_o , en een warmteproductie aan het oppervlak gelijk aan A_o . Stel dat informatie over de structuur van de ondergrond aanleiding is aan te nemen dat de verdeling van de warmteproductie is als in onderstaande figuur (een laag met dikte D en uniforme warmteproductie A_o en daaronder een even dikke laag met een warmteproductie $0,5 A_o$).

Z.O.Z.



- a) Welke exponentiele verdeling van de warmteproductie (afnemend met diepte) zou qua totale warmteproductie overeenkomen met (d.w.z. gelijk zijn aan) deze verdeling?
- b) Leid een uitdrukking af voor de temperatuurverdeling $T(z)$ behorend bij de exponentiele verdeling van warmteproductie bedoeld onder a).

Doortongdoets #1

Opgave 1

Voor oude lithosteen geldt dat $t \rightarrow \infty$. Omdat $\lim_{t \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{\eta^2 \eta^2 h^2 t}{L^2}\right) = 0$ geldt als temperatuurverdeling voor oude lithosteen

$$T(z) = T_a [1 - z/L]$$

en voor de dichtheid

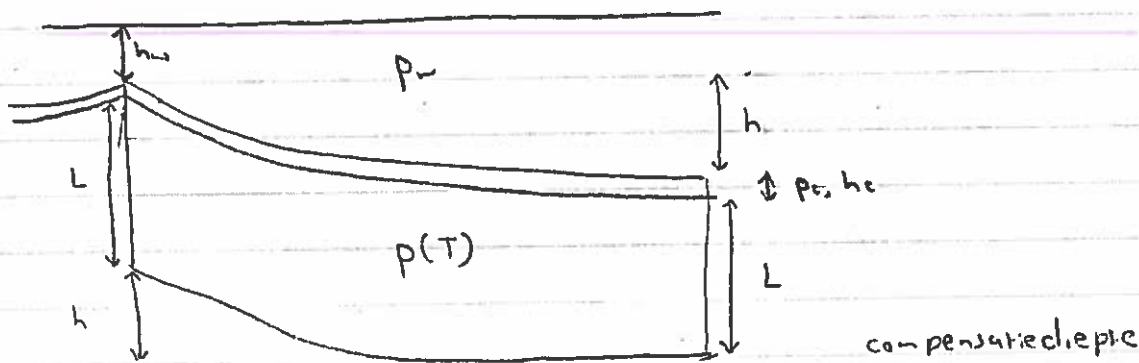
$$\rho = \rho_a [1 - \alpha (T - T_a)]$$

$$= \rho_a [1 - \alpha \{ T_a [1 - z/L] - T_a \}]$$

$$= \rho_a [1 + \alpha T_a z/L]$$

Voor de diepte van de oceaan bodem gebruiken we lokale doortongdoets t of de rug. Als compensatie diepte gebruiken we de onderkan

van de oceanische lithosteen (welke immers constant is in het plaatmodel)



$P_{ridge} = P_{oude lithosteen}$

$\rho_w g h_w + \rho_c g h_c + \rho_a g (L + h) = \rho_w g (h_w + h) + \rho_c g h_c + \int_0^L \rho(T) g dz$
 eerst evalueren we de integraal:

$$\int_0^L \rho(T) g dz = \int_0^L \rho_a [1 + \alpha T_a z/L] g dz$$

$$= \rho_a g L + \rho_a g \alpha T_a \frac{L}{2} \quad \text{en dus:}$$

$$\rho_a (L + h) = \rho_w h + \rho_a L + \rho_a \alpha T_a L / 2$$

$$h (\rho_a - \rho_w) = \rho_a \alpha T_a L / 2$$

$$h = \frac{\rho_a \alpha T_a L}{2 (\rho_a - \rho_w)}$$

De oceandiepte is dus:

$$h_w + h = h_w + \frac{\rho_a \alpha T_a L}{2 (\rho_a - \rho_w)}$$

Opdracht 2

a) De warmtevergelijking is:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{A}{k}$$

met $A = \begin{cases} A_0 & 0 < z < D \\ \frac{1}{2} A_0 & D < z < 2D \end{cases}$

en $T(z=0) = T_0$

$q(z=0) = q_0$

$T(z=D) = \text{continu}$

De totale warmteproductie (dus geïntegreerd over de diepte) is

$$\begin{aligned} \int_0^{2D} A(z) dz &= \int_0^D A_0 dz + \int_D^{2D} \frac{1}{2} A_0 dz \\ &= A_0 z \Big|_0^D + \frac{1}{2} A_0 z \Big|_D^{2D} \\ &= A_0 D + \frac{1}{2} A_0 (2D - D) \\ &= \frac{3}{2} A_0 D \end{aligned}$$

Voor een exponentiële verdeling $A(z) = A_0 \exp(-z/L)$ is de totale warmteproductie

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} A(z) dz &= \int_0^{\infty} A_0 \exp(-z/L) dz = -A_0 L \exp(-z/L) \Big|_0^{\infty} \\ &= A_0 L \end{aligned}$$

Het twee-laags model en het exponentiële model geven dus dezelfde warmteproductie als

$$\frac{3}{2} A_0 D = A_0 L$$

$$L = \frac{3}{2} D$$

Dus: $A = A_0 \exp(-z^2 / \frac{3}{2} D)$

b) De warmtevergelijking is

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{A_0}{k} \exp(-z/L)$$

Deze primitiveren we z.x. om de temperatuurverdeling te krijgen

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{A_0 L}{k} \exp(-z/L) + c_1$$

$$T(z) = -\frac{A_0 L^2}{k} \exp(-z/L) + c_1 z + c_2$$

Hierin zijn c_1 en c_2 integratieconstanten welke bepaald worden uit de randvoorwaarden.

$$T(z=0) = T_0 \quad (\text{I})$$

$$q(z=0) = -q_0 \quad (\text{II}) \quad (\text{de warmtestroom is gericht in de negatieve } z\text{-richting})$$

uit (I) volgt

$$T_0 = -\frac{A_0 L^2}{k} + c_1 \quad \text{dus} \quad c_1 = T_0 + \frac{A_0 L^2}{k}$$

$$\text{dus } T(z) = \left[1 - \exp(-z/L) \right] \frac{A_0 L^2}{k} + c_1 z + T_0$$

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial z} = -A_0 L^2 \left[\frac{1}{L} \exp(-z/L) \right] - k c_1$$

$$\text{○ } q(z=0) = -q_0 = -A_0 L - k c_1 \quad \text{dus } c_1 = (q_0 - A_0 L) / k$$

$$\text{○ } T(z) = \frac{A_0 L^2}{k} \left[1 - \exp\left(\frac{-z}{L}\right) \right] + \frac{q_0 - A_0 L}{k} z + T_0$$

verder geldt nog $L = \frac{2}{3} D$:

$$T(z) = \frac{9 A_0 D^2}{4 k} \left[1 - \exp\left(\frac{-2z}{3D}\right) \right] + \frac{q_0 - \frac{2}{3} A_0 D}{k} z + T_0$$

≡