Uitwerking Voortgangstoets #1 Lithosfeer Dynamica 23 februari 2017

Opgave 1. Continentale warmtestroom

(a) Energiebehoud of warmtebehoud. (1 punt)

(b) Aanname (1) is stationaire temperaturen $\partial T/\partial t = 0$. Dit mag worden aangenomen omdat waarnemingen aangeven dat de continentale oppervlaktewarmtestroom zeer geleidelijk verandert, d.w.z. $\partial q_0/\partial t \approx 0$. Dit betekent dat

$$0 \approx \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-k\frac{\partial T}{\partial z}\right) = -k\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)$$

Omdat niet te verwachten is dat de temperatuur constant is met de diepte is de temperatuur stationair. (1 punt voor antwoord “stationair”, 1 punt voor volledige motivatie).

Aanname (2) is dat warmtetransport beperkt is tot de verticale richting. Argument hiervoor is dat, vanwege de min of meer horizontale gelaagdheid in de korst en lithosfeermantel, laterale temperatuurverschillen klein zijn wanneer de geotherm stationair is. (1 punt voor antwoord “verticaal”, 1 punt voor volledige motivatie).

Aanname (3) is dat de conductiviteit niet afhangt van de diepte. De conductiviteit is een eigenschap die daarom van laag tot laag verschilt. De vereenvoudiging dat conductiviteit niet afhangt van de diepte mag dus alleen gemaakt worden wanneer je een oplossing zoekt voor één laag. (1 punt voor antwoord “uniform”, 1 punt voor volledige motivatie).

(c) Primitiveer vergelijking (2) twee maal

$$T(z) = c_1 + c_2 z - \frac{A}{2k}z^2 \quad Q(z) = -k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -kc_2 + Az$$

Uit

$$Q(z_m) = -q_m \text{ zodat } c_2 = \frac{Az_m + q_m}{k}$$

(1 punt voor correcte uitdrukking voor primitieve (temperatuur), 1 punt voor correcte uitdrukking voor c_1 en 1 punt voor correcte uitdrukking voor c_2). Tenslotte volgt uit de temperatuur op de Moho:

$$T(z_m) = T_m = c_1 + \frac{q_m + Az_m}{k}z_m - \frac{A}{2k}z_m^2 \Leftrightarrow c_1 = T_m - \frac{q_m}{k}z_m - \frac{A}{2k}z_m^2$$

en de oplossing voor de korst is dus

$$T(z) = T_m - \frac{q_m}{k} z_m - \frac{A}{2k} z_m^2 + \frac{q_m + A z_m}{k} z - \frac{A}{2k} z^2$$
$$= T_m + \frac{q_m}{k}(z - z_m) - \frac{A}{2k}(z - z_m)^2$$

<u>Check</u>: De temperatuur in de korst is lager dan die op de Moho, zoals verwacht. Verder is

$$Q(z) = -q_m + A(z - z_m)$$

en invullen van *z=0* en $z = z_m$ geeft de verwachtte waarden. (1 punt voor checken op fysisch realistisch zijn van de gevonden uitdrukking)

De oplossing in de lithosfeermantel is

$$T(z) = c_3 + c_4 z \quad Q(z) = -k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -kc_4 \text{ zodat } q_m = |Q(z)| = kc_4 \Rightarrow c_4 = \frac{q_m}{k}$$

Hieruit volgt de oplossing:

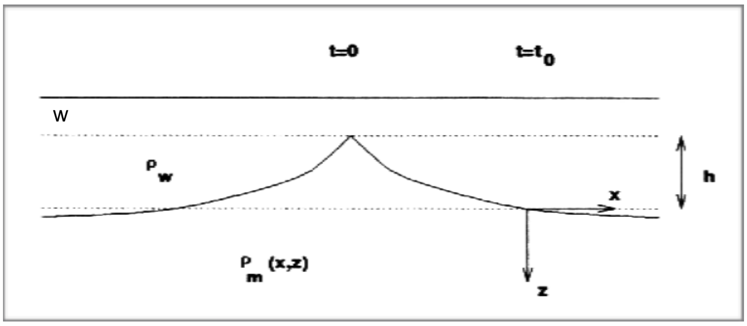
$$T(z_m) = T_m = c_3 + \frac{q_m}{k} z_m \Rightarrow c_3 = T_m - \frac{q_m}{k} z_m$$
$$T(z) = T_m + \frac{q_m}{k}(z - z_m)$$

(1 punt voor correcte uitdrukking voor primitieve (temperatuur), 1 punt voor correcte uitdrukking voor c_3 en 1 punt voor correcte uitdrukking voor c_4).

<u>Check</u>: Invullen van $z = z_m$ geeft verwacht resultaat. De temperatuur neemt toe met de diepte, ook zoals verwacht. (1 punt voor checken op fysisch realistisch zijn van de gevonden uitdrukking)

Opgave 2. Bathymetrie gewijzigd grenslaagmodel

(a) Isostatisch evenwicht betekent dat de druk op een bepaalde diepte (de *compensatiediepte)* lateraal uniform is. Druk wordt vertaalt naar gewicht volgens $P = \int \rho g \,\mathrm{d}z$. In oceanische lithosfeer Pratt isostasie. (1 punt).



Geometrie gebruikt bij analyse van de diepte van de oceaanbodem

(b) Een schets is noodzakelijk! (1 punt voor een correcte schets met alle gebruikte geometrische elementen en een assenstelsel).

Vergelijk de drukken van de twee kolommen op compensatiediepte $z = L(t_0)$ (daaronder is de dichtheidsstructuur hetzelfde bij de rug en bij de oudere kolom:

$$P(0) = gw\rho_w + g\int_{-h}^{L(t_0)} \rho(z,0)\mathrm{d}z = gw\rho_w + g\int_{-h}^{0} \rho(z,0)\mathrm{d}z + g\int_{0}^{L(t_0)} \rho(z,0)\mathrm{d}z$$

$$P(t_0) = g(w+h)\rho_w + g\int_{0}^{L(t_0)} \rho(z,t_0)\mathrm{d}z$$

(1 punt voor correcte uitdrukkingen voor de druk onder beide kolommen, inclusief integratiegrenzen).

De temperatuur bij de rug is T_a op iedere diepte. Daarom is

$$P(0) = gw\rho_w + g\rho_a h + g\int_{0}^{L(t_0)} \rho_a\,\mathrm{d}z$$

$$P(t_0) = g(w+h)\rho_w + g\int_{0}^{L(t_0)} \rho(z,t_0)\mathrm{d}z$$

Isostasie betekent dat de druk uniform is op de compensatiediepte, $P(0) = P(t_0)$ (1 punt wanneer duidelijk opgeschreven is dat de druk gelijk gesteld moet worden), waardoor we de vergelijkingen kunnen herschrijven:

$$g(\rho_a - \rho_w)h = g\int_{0}^{L(t_0)} \left(\rho(z,t_0) - \rho_a\right)\mathrm{d}z \quad \Leftrightarrow \quad (\rho_a - \rho_w)h = \rho_a\alpha\int_{0}^{L(t_0)} \left[T_a - T(z,t)\right]\mathrm{d}z$$

(1 punt voor de tweede uitdrukking hierboven).

Hierbij heb ik gebruikt dat:

$$\rho(z,t) = \rho_a\left[1 - \alpha\left(T(z,t) - T_a\right)\right]$$

Hierdoor is

$$h = \frac{\rho_a\alpha}{(\rho_a - \rho_w)}\int_{0}^{L(t_0)} \left[T_a - T(z,t)\right]\mathrm{d}z$$

Voor het gewijzigd grenslaagmodel wordt de temperatuur gegeven door:

$$T(z,t) = \left(\frac{3T_a}{2} - \frac{q_a L}{2k}\right)\left(\frac{z}{L}\right) + \left(\frac{q_a L}{2k} - \frac{T_a}{2}\right)\left(\frac{z}{L}\right)^3$$

Voor de diepte van de oceaanbodem ten opzichte van de rug krijgen we dan:

$$h = \frac{\rho_a \alpha}{(\rho_a - \rho_w)} \int_0^{L(t_0)} \left[T_a - \left(\frac{3T_a}{2} - \frac{q_a L}{2k} \right) \left(\frac{z}{L} \right) - \left(\frac{q_a L}{2k} - \frac{T_a}{2} \right) \left(\frac{z}{L} \right)^3 \right] \mathrm{d}z$$

(1 punt voor bovenstaande uitdrukking voor *h*).
en dit geeft

$$\begin{aligned} h &= \frac{\rho_a \alpha}{(\rho_a - \rho_w)} \left[T_a L - \left(\frac{3T_a}{2} - \frac{q_a L}{2k} \right) \left(\frac{L^2}{2L} \right) - \left(\frac{q_a L}{2k} - \frac{T_a}{2} \right) \left(\frac{L^4}{4L^3} \right) \right] \\ &= \frac{\rho_a \alpha}{(\rho_a - \rho_w)} \left[T_a L - \frac{3T_a L}{4} + \frac{T_a L}{8} + \frac{q_a L^2}{4k} - \frac{q_a L^2}{8k} \right] \\ &= \frac{\rho_a \alpha L}{8(\rho_a - \rho_w)} \left[3T_a + \frac{q_a L}{k} \right] \end{aligned}$$

(1 punt voor laatste uitdrukking voor *h*).

Totaal zijn er 22 punten te verdienen. Het cijfer volgt uit de volgende formule:

$$cijfer = \frac{punten}{22} \cdot 10$$