Tentamen Mantel Dynamica (18-04-2013; 13:15 – 15:15)

*Er zijn 6 opgaven (**zie ook achterzijde!**). Succes!*
*Punten: **1** (10) ; **2** (5) ; **3** (7) ; **4** (5) ; **5** (8) ; **6** (10)*
Wellicht nuttige informatie:

$$\frac{d}{dt}\left[\int_V T(r,t)dV\right] = \int_V \frac{dT}{dt} + T\frac{\partial v_k}{\partial x_k}dV \qquad \frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \qquad \frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_j\frac{\partial T}{\partial x_j}$$

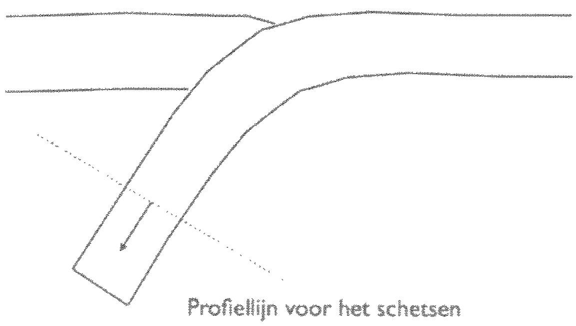
$$\tau_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\eta e_{ij} \qquad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \qquad \sigma'_{ij} \equiv \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \qquad \rho\frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i$$

$$\rho c_p\frac{dT}{dt} - \alpha T\frac{dp}{dt} = \tau_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + \rho H$$

1. Geef de (beargumenteerde) fysische betekenis van alle termen in de
- continuiteitsvergelijking,
- algemene bewegingsvergelijking,
- en in de temperatuurvergelijking.

2. Is spanning (stress) in de lithosfeer en mantel 1) een oorzaak van stroming en deformatie of 2) een gevolg van stroming en deformatie, of 3) een mix? Beargumeenteer je antwoord!

3. Beschouw schematisch een slab die in de mantel subduceert. Loodrecht op de slab zal in de mantel een snelheidsprofiel bestaan die de gang van de slab door de mantel accommodeert.
Vergelijk op een kwalitatieve en schematische wijze twee snelheidsprofielen die behoren bij (1) de situatie waarin de mantel zich gedraagt volgens een lineaire (Newtonse) rheologie voor manteldeformatie en (2) volgens een niet-lineaire (bijv. Power Law) rheologie. Dus: vergelijk het effect van de verschillende rheologieën op het ontstane snelheidsprofiel. Beargumenteer je antwoord!



Profiellijn voor het schetsen van het snelheidsveld in de mantel

4. Proof that in a flowing medium with density ρ the following relation holds

$$\frac{d}{dt}\left[\int_V \rho T dV\right] = \int_V \rho\frac{dT}{dt}dV$$

for any differentiable scalar function T and material volume V.

5. Prove that for a Newtonian fluid $\sigma'_{ij} = 2\eta e'_{ij}$ where the prime denotes the deviators of stress and strain rate.

6. The Navier-Stokes equation for perturbations relative to a hydrostatic reference state is in Cartesian coordinates $\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \Delta \rho g_i$. The density perturbation is driving the flow of a medium contained in the material volume V. Assume that gravity is only working vertically, $\mathbf{g} = (0,0,g)^T$ and that the velocity field is $\mathbf{v} = (u,v,w)^T$. Assume incompressible flow and that the inertial term can be neglected.

Derive the following energy conservation law relating the dissipation of gravitational energy into the energy released due to frictional flow:

$$\int_V \Delta \rho g w dV = \int_V \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV$$

[Hint: Take the inner product of the equation of motion with the velocity field and integrate the result over V. Assume an impermeable boundary S of V (i.e. $\mathbf{v} \bullet \mathbf{n} = 0$) and that the boundary is shear stress free (free slip) or has no-slip (**v=0**)]