Tussentoets wiskunde

1. Gegeven is de cubus $ABCD - EFGH$. Dus E ligt boven A, F ligt boven B, etc. De lengte van de ribbe van de cubus is a. De oorsprong O van het assenstelsel (x, y, z) bevindt zich in het hoekpunt A. De x-as valt samen met de ribbe (= vector) $\overline{AD}$, de y-as met ribbe $\overline{AB}$, en de z-as met ribbe $\overline{AE}$. (Rechtshandig assenstelsel). Hint 1: Alle hoekpunten (eindpunten van de vectoren) zijn uit te drukken in de ribbe-lengte a. Hint 2: Maak een schets van de cubus.

   a. Bereken de hoek tussen de vectoren $\overline{AH}$ en $\overline{AF}$.

   b. Bereken het uitwendig product $\overline{AH} \times \overline{AF}$ en geef in een schets aan hoe deze orthogonale vector, die loodrecht staat op het vlak dat opgespannen wordt door de vectoren $\overline{AH}$ en $\overline{AF}$, gericht is.

   c. Bereken de hoek tussen de lichaamsdiagonaal $\overline{AG}$ en de vlakdiagonaal $\overline{AH}$.

   d. Toon aan dat $\overline{AD} \times \overline{AB} = a\,\overline{AE}$. Hint: de vectorvoorstelling van $\overline{AE}$ is $0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + a\mathbf{k}$

   e. Bereken de norm van de vector $\overline{AH} + \overline{AF}$.

2. Bepaal de partiële afgeleiden

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

   van de volgende functies:

   a. $f(x, y) = x^2 y\, e^{xy}$

   b. $f(x, y) = y^2 x + \ln x$

   c. $f(x, y) = \sin(x + y)$

3. Gegeven is de functie

$$f(x, y, z) = x^2 yz + xy^2 z + xyz^2$$

   a. Bepaal de partiële afgeleide $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

   b. Bepaal de partiële afgeleide $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$.

c. Laat zien door middel van een berekening dat $f_{xzy} = f_{yzx}$.

4. Gegeven is de functie

$$f(x,y) = \frac{xy}{4x^2 + 9y^2}$$

a. Waarom is deze functie continu in het punt $(-1,2)$? Motiveer je antwoord! (Je hoeft niets uit te rekenen, alleen met woorden uitleggen waarom de functie continu is in dat punt.)

b. Bereken nu de limiet

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} f(x,y)$$

c. Gegeven is de vergelijking van de lijn (= 'curve')

$$y = m\,x$$

Hierin is $m \in \mathbf{R}$ de richtingscoefficient van de lijn. Omdat m iedere denkbare reëele waarde kan aannemen is de bovenstaande vergelijking dus eigenlijk een oneindig grote verzameling van lijnen die met elkaar gemeen hebben dat ze door de oorsprong $(0,0)$ gaan. Er is een wiskundige stelling die zegt dat een limiet alléén dan bestaat als de limiet berekend langs elke willekeurige curve C het zelfde unieke getal oplevert. Toon aan dat de limiet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{4x^2 + 9y^2}$$

NIET bestaat. Hint: Substitueer de vergelijking van de lijnen $y = m\,x$ in de functie $f(x,y)$ en bereken vervolgens de limiet.