Hertentamen Wiskunde Blok II

Vrijdag 12 maart 2010, 9:00-12:00

Veel succes!

1. We beschouwen de volgende tweede-orde homogene lineaire gewone differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda\, y = 0 \;\text{ of ook wel }\; y'' + \lambda\, y = 0 \tag{1}$$

waarin λ een constante is.

(a) Stel dat $\lambda = -1$. Bepaal dan de algemene oplossing.

(b) De beginvoorwaarden worden gegeven door

$$y(0) = 1 \;\text{ en }\; dy/dx(0) = y'(0) = 0$$

Beplaal de particuliere oplossing voor dit beginwaardeprobleem.

(c) We veronderstellen nu dat de constante λ weer een willekeurig getal is, dus $\lambda \in \mathbf{R}$. Bovendien zijn er twee **nieuwe** randvoorwaarden gegeven:

$$y(0) = 0 \quad \text{en} \quad y(\pi) = 0$$

Toon aan dat indien

$$\lambda \leq 0$$

er maar **EEN** (triviale) oplossing bestaat, namelijk $y(x) = 0$.

(d) **BONUS** Laat zien dat indien $\lambda > 0$ de oplossing gegeven wordt door

$$y(x) = C \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$$

waarin C een arbitraire constante is, als

$$\lambda = 1^2, 2^2, 3^2, 4^2 \ldots.$$

en anders (dus NIET voor die waarden van λ!) de oplossing door $y(x) = 0$ gegeven wordt.

2. Bepaal met behulp van **partiële integratie** de volgende integralen

$$\int x \ \sin(x) \ dx$$

en

$$\int x^2 \ \sin(x) \ dx$$

3. Gegeven zijn de vectoren

$$\mathbf{u} =< 1,2,3 >, \quad \mathbf{v} =< 1,0,1 > \quad \text{en} \quad \mathbf{w} =< 0,1,1 >$$

   (a) Bereken de hoek tussen de vectoren **u** en **v**

   (b) Bereken de hoek tussen de vector die loodrecht op het vlak staat dat opgespannen wordt door de vectoren **u** en **v**, én de vector **w**

   (c) Bereken het oppervlak van de driehoek dat gevormd wordt door de eindpunten van de vectoren **u** en **v** en de oorsprong O met behulp van het uitwendig produkt.

   (d) Leg uit in wiskundige bewoordingen waarom $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

   (e) Bereken
   $$|\mathbf{u} \cdot (\mathrm{v} \times \mathbf{w})|$$
   Wat stelt dit eigenlijk voor?

   (f) Waarom is
   $$|(\mathbf{u} \cdot \mathrm{v}) \times \mathbf{w})|$$
   onzin?

4. Gegeven is de functie

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

   (a) Bepaal de limiet
   $$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$$
   langs de verzameling rechte lijnen $y = mx$, waarin $m \in \mathbf{R}$.

   (b) Bepaal deze limiet langs de verzameling parabolen gegeven door $y = kx^2$, waarin $k \in \mathbf{R}$.

   (c) Iemand beweert dat de functiewaarde $f(0,0)$ niet bestaat. Klopt dat? Leg dit uit in wiskundige bewoordingen.

   (d) Bepaal de partiële afgeleide $\partial f / \partial y$