Tentamen Wiskunde blok II. 26 januari 2016, 9:00-11:30

Vergeet niet je naam op te schrijven en schrijf netjes. Licht je afleidingen toe. Succes!

1. Gegeven is de eerste-orde differentiaalvergelijking

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} = xy + x$$

   a) Los de vergelijking op met behulp van scheiden van variabelen.

   b) Geef de oplossing van het beginwaardeprobleem $y(0) = 4$.

   c) **Bonus** Los deze vergelijking ook op met de integrerende factor methode.

2. Gegeven is de volgende integraal

$$\int \frac{x}{9-x^2}dx$$

   a) Los de vergelijking op met behulp van **breuksplitsen** (*Hint: gebruik het 'merkwaardig product'*).

   b) Los de vergelijking ook op met behulp van een **goniometrische substitutie**.

3. Indien er geen warmtebronnen in een systeem aanwezig zijn voldoet de temperatuurverdeling aan de zogenaamde Laplace vergelijking

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

   Laat zien dat de functie $T(x,y) = e^x \sin y + x^2 - y^2$ een oplossing is van de Laplace vergelijking.

4. a) Een driehoek heeft hoekpunten op $A$, $B$ en $C$ waarbij $A = (1,1,2)$, $B = (0,0,0)$ en $C = (1,2,3)$. Bereken de oppervlakte van deze driehoek.

   Gegeven zijn de vectoren $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$ en $\mathbf{w} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

   b) Laat zien dat $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$

   c) Bepaal de hoek tussen $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ exact.

5. Gegeven is de volgende tweede-orde homogene differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$$

   met constanten $p, q \in \mathbb{R}$.

   a) Geef de oplossing van de vergelijking indien $p = 2$ en $q = 1$ met randvoorwaarden $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$.

   b) Laat zien dat als $p = 0$ en $q < 0$ de algemene oplossing gegeven wordt door $y(x) = C_1 e^{\sqrt{-q}x} + C_2 e^{-\sqrt{-q}x}$.

   c) Gegeven is dat $q > 0$. Voor welke waarden van $p$ heeft de vergelijking oplossingen in de vorm $y(x) = e^{ax}(C_1 \sin(bx) + C_2 \cos(bx))$

6. Gegeven is de functie

$$f(x,y) = \frac{4x^3 - 4y^2}{2x^2 - xy}$$

   a) Bereken de de limiet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

   via de verzameling rechte lijnen $y = kx$, met $k \in \mathbb{R}$.

   b) Beredeneer met behulp van je antwoord bij a) of de functie $f(x,y)$ continu is in (0,0).