Tentamen Wiskunde Blok II

Vrijdag 4 februari 2005

9:00-12:00

Veel succes!

1. We beschouwen een cylindervormig vat met een straal r [m] en een hoogte L [m]. Aan de bovenzijde van het vat stroomt water het vat binnen met een constante volumestroom Φ_{in} [m^3/s]. In de bodem van het vat bevindt zich een kleine uitstroomopening. De volumestroom die het vat verlaat blijkt evenredig te zijn met de hoogte $h = h(t)$ [m] van het waterniveau in het vat:

$$\Phi_{uit} = kh,$$

waarin k [m^2/s] een evenredigheidsconstante is.

a. Leg uit waarom de differentiaalvergelijking waaraan het waterniveau als functie van de tijd voldoet gegeven wordt door

$$A\frac{dh}{dt} = \Phi_{in} - kh,$$

waarin $A = \pi r^2$ [m^2] het oppervlak van de dwarsdoorsnede van het vat is.

b. Geef de algemene oplossing $h = h(t)$ van deze differentiaalvergelijking indien $\Phi_{in} = 1$ [m^3/s], $k = 1$ [m^2/s], en $r = 1/\sqrt{\pi}$ [m].

c. Bepaal de oplossing van het beginvoorwaardeprobleem $h(0) = 2$: dus op $t = 0$ is de waterhoogte in het vat 2 [m].

d. Ontstaat er na enige tijd een stationaire waterhoogte in de bak? Zo ja, leg dan uit hoe dat komt en bereken dan deze hoogte.

e. Er wordt iets aan de vorm van de uitstroomopening veranderd waardoor nu de uitstroming evenredig is met de waterhoogte in het kwadraat: $\Phi_{uit} = h^2$. Met de bovengegeven waarden van de constanten wordt de differentiaalvergelijking dan:

$$\frac{dh}{dt} = (1 - h^2).$$

Omdat $(1 - h^2) = (1 + h)(1 - h)$ ('merkwaardig product') is deze differentiaalvergelijking oplosbaar (na scheiden van variabelen!) met behulp van breuksplitsen. Gebruik deze aanwijzing om de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking te vinden.

2. Toon aan met behulp van **partiële integratie** dat

$$\int_0^1 x^2 e^x \, dx = e - 2$$

3. Gegeven is een cubus $ABCD \cdot EFGH$ en ribbe a. De oorsprong van het rechtsdraaiende assenstelsel (x, y, z) valt samen met hoekpunt A. De richting van $\overline{AD}$ valt samen met de eenheidsvector $\mathbf{i}$, $\overline{AB}$ met de richting van $\mathbf{j}$, en $\overline{AE}$ met $\mathbf{k}$.

   a. Bereken de hoek tussen de lichaamsdiagonaal $\overline{AG}$ en de vlakdiagonaal $\overline{EG}$ met behulp van het inwendig product. Let op: $\overline{EG} = \overline{AG} - \overline{AE} = < a, a, 0 >$!

   b. Bereken $\overline{AB} \times \overline{AH}$.

   c. Bepaal het oppervlak van de driehoek AFH met behulp van het uitwendig product.

   d. Indien we twee vectoren $\overline{u}$ en $\overline{v}$ in de drie-dimensionale ruimte beschouwen die een hoek θ met elkaar maken in het punt dat ze gemeen met elkaar hebben (de beginpunten van de vectoren vallen samen), dan is het oppervlak van het parallellogram dat $\overline{u}$ en $\overline{v}$ als aangrenzende zijden heeft gegeven door

$$||\overline{u} \times \overline{v}|| = ||\overline{u}||||\overline{v}|| \sin(\theta).$$

   Toon aan dat er ook geldt:

$$||\overline{u} \times \overline{v}|| = \overline{u} \cdot \overline{v} \tan(\theta).$$

4. Gegeven is de functie

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi^2}\left[1 - \cos(\pi c t)\right]\sin(\pi x),$$

waarin c een constante is.

a. Bepaal de partiële afgeleiden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

b. Toon aan met behulp van de resultaten van vraag a. dat de functie $u(x,t)$ een oplossing is van de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sin(\pi x).$$

5. Gegeven is de functie

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{met} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

a. Bereken de limiet

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} f(x,y).$$

b. Vervolgens gaan we het gedrag van deze functie in het punt (0,0) onderzoeken. Bereken de waarde van de limiet indien we het punt (0,0) langs de x-as benaderen.

c. Bereken de limiet indien we het punt (0,0) langs de y-as benaderen.

d. Beargumenteer of de limiet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

wel of niet bestaat op grond van je bevindingen onder b. en c.