

Tussentoets Wiskunde: Differentiaalvergelijkingen

Donderdag 13-12-12, 15:00-17:00

Succes!

1. In het modelleren van ecologische systemen wordt vaak de zogenaamde *Logistische Vergelijking (LV)* gebruikt. Deze vergelijking geeft de groei of afname van een populatie weer. Stel dat $y = y(t)$ het aantal dieren/planten/bacteriën in een populatie is op het tijdstip t . De LV wordt gegeven door

$$\frac{dy}{dt} = k \left[1 - \frac{y}{L} \right] y, \quad \text{met } k > 0$$

Hierin is L de 'evenwichts populatie' en k een constante.

- (a) Deze vergelijking heeft twee triviale oplossingen¹. Welke zijn dat?
- (b) Als y heel klein is gedraagt de LV zich als een exponentiële groei vergelijking. Toon dat aan.
- (c) Leg uit waarom $y(t)$ **toeneemt** als $y < L$ en **afneemt** als $y > L$.
- (d) Voor welke waarde van y is de snelheid ($= dy/dt$) waar mee de populatie verandert maximaal? Hint: Bepaal de extreme waarde(n) van dy/dt .
- (e) Bepaal de algemene oplossing van de LV vergelijking.
- (f) Stel dat de beginvoorwaarde is gegeven door $y(0) = y_0$. Toon aan dat de oplossing van het beginvoorwaardeprobleem gegeven wordt door

$$y(t) = \frac{y_0 L}{y_0 + (L - y_0)e^{-kt}}$$

- (g) Voldoet deze oplossing aan de triviale oplossingen gegeven in vraag a)?
- (h) Is deze vergelijking op te lossen met een **integrerende factor**? Motiveer het antwoord.

¹Dat zijn oplossingen die constant zijn en dus niet van de tijd afhangen

2. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} + 2xy = 0$$

- (a) Los deze vergelijking op met behulp van **scheiden van variabelen**.
- (b) Los deze vergelijking op met behulp van **een integrerende factor**.
- (c) Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem $y(0) = 1$.

3. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y - \frac{1}{\cos(x)} \frac{dy}{dx} = 0$$

- (a) Los deze differentiaalvergelijking op (met een methode naar eigen keuze).
- (b) Iemand beweert dat deze vergelijking EEN triviale oplossing heeft, namelijk $y(x) = 0$. Klopt dat? Motiveer je antwoord!
- (c) Wat is de oplossing van het beginvoorwaardeprobleem $y(0) = 1$?

4. Iemand (anders) beweert dat

$$y(x) = Ce^{-\frac{x}{2}} + x - 3$$

de algemene oplossing is van de volgende differentiaalvergelijking

$$2 \frac{dy}{dx} + y = x - 1$$

Klopt dat? Leg uit m.b.v. wiskunde!

..... Einde.....