Tussentoets 3

Partiële afgeleiden, limieten in meer dimensies en vectoren

Donderdag 24 januari 2013, 15:00 - 17:00

Veel succes!

1. Gegeven is de functie

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)^2$$

   Bepaal de limiet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

   doormiddel van poolcoordinaten: $x = r\sin(\theta)$ en $y = r\cos(\theta)$

2. Gegeven is de vergelijking

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8z = 8$$

   (a) Het vermoeden bestaat dat dit de vergelijking van een bol is. Als dat zo is bepaal dan de coordinaten van het middelpunt en de straal r.

   (b) Bepaal de afgeleide: $\partial z/\partial x$ met behulp van impliciete partiële differentiatie.

3. Gegeven zijn de vectoren

$$\mathbf{u} =< 1, 2, 3 >, \quad \mathbf{v} =< 1, 0, 1 > \quad \text{en} \quad \mathbf{w} =< 0, 1, 1 >$$

   (a) Bereken de hoek tussen de vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$

   (b) Bereken de hoek tussen de vector die loodrecht op het vlak staat dat opgespannen wordt door de vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$, én de vector $\mathbf{w}$

   (c) Bereken het oppervlak van de driehoek dat gevormd wordt door de eindpunten van de vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ en de oorsprong O met behulp van het uitwendig produkt.

   (d) Leg uit in wiskundige bewoordingen waarom $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

(e) Wat is de betekenis van $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$?

(f) Wat weet je van de drie vectoren $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ als geldt dat

$$|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| = 0$$

(g) Wat is het verschil in wiskundige zin tussen $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ en $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$? Leg uit in wiskundige bewoordingen.

4. Gegeven is de functie

$$f(x, y) = \frac{x^3\, y}{2x^6 + y^2}$$

(a) Bepaal de afgeleide $\partial f / \partial x$.

(b) Bepaal de waarde van de limiet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3\, y}{2x^6 + y^2}$$

indien het punt (0,0) langs de x-as benaderd wordt.

(c) Bepaal de waarde van de bovenstaande limiet indien het punt (0,0) langs de curve $y = x^2$ benaderd wordt.

(d) Bepaal de waarde van de bovenstaande limiet indien het punt (0,0) langs de curve $y = x^3$ benaderd wordt.

(e) Bestaat deze limiet? Motiveer je antwoord in wiskundige bewoordingen.

..... Einde .....