Tussentoets Differentiaalvergelijkingen Wiskunde Blok II

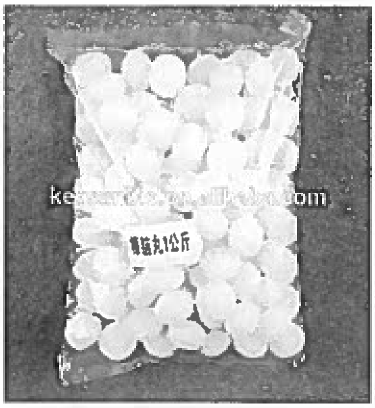
Maandag 15 januari 2018, 15:00-17:00

Succes!

1. Vroeger werd kleding beschermd tegen motten door bolletjes kamfer (ook wel 'mottenballen' genaamd). De kamfer uit deze bolletjes verdampt en die stank houdt de motten op afstand... (overigens ook de medemens, maar dat terzijde). De kamfer kan alleen aan het oppervlak van het bolletje verdampen. Daarom is de massa die per tijdseenheid verdampt evenredig met het oppervlak van het bolletje. Door het verdampen neemt dit oppervlak af (het bolletje krimpt immers). Van een bol weten we het volgende:

$$\text{oppervlak v.e. bol} = A_{\text{bol}} = 4\pi r^2 \text{ en volume v.e. bol} = V_{\text{bol}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

De massa afname van het kamferbolletje wordt beschreven m.b.v. de



volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{dm}{dt} = -\beta A_{\text{bol}} = -\beta 4\pi r^2,$$

waarin $r = r(t)$ [m] de straal van het bolletje is, $m = m(t)$ [kg] de massa van het bolletje, t [s] de tijd en β is een evenredigheidsconstante.

(a) Wat is de eenheid (dimensie) van de evenredigheidsconstante β?

(b) Ook geldt er

$$m = \rho V_{\text{bol}} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3,$$

waarin ρ [kg/m^3] de dichtheid van het bolletje is. Toon aan dat geldt:

$$\frac{dm}{dt} = -km^{\frac{2}{3}},$$

waarin k een andere evenredigheidsconstante is.

(c) Bepaal de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking.

(d) Als op $t = 0$ de massa van het bolletje $m(0) = m_0$ is bepaal dan in formule vorm hoeveel tijd nodig is om het hele bolletje te laten verdampen?

2. Indien een badminton shuttle naar beneden valt werken er drie krachten op de shuttle: zwaartekracht, opwaartse kracht en wrijvingskracht. De opwaartse kracht (= Wet van Archimedes: Eureka!) in lucht is verwaarloosbaar. Voor de wrijvingskracht geldt:

$$F_{\text{wrijving}} = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2,$$

waarin c_w een weerstandsfactor is (die van de vorm van de shuttle afhangt), ρ [kg/m^3] de dichtheid van de lucht is, A [m^2] het (frontale) oppervlak van de shuttle is en v [m/s] de snelheid van de shuttle. De

totale kracht die op de shuttle werkt (Wet van Newton) is:

$$F_{\text{totaal}} = F_{\text{zwaartekracht}} - F_{\text{wrijving}},$$

zodat

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{2}c_w\rho A v^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g - kv^2,$$

waarin $k = \frac{1}{2}c_w\rho A/m$. Voor het gemak kiezen we $k = 1$ en $g = 1$ (niet erg realistisch.... Anyway).

(a) Laat zien met behup van **breuksplitsen** dat de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking gegeven wordt door

$$v(t) = \frac{Ce^{2t} - 1}{Ce^{2t} + 1},$$

waarin C een integratieconstante is. Hint: Merkwaardig product $(1 - v^2) = (1 - v)(1 + v)$.

(b) We laten de shuttle van af een bepaalde hoogte vallen: beginsnelheid is nul. Dus $v(0) = 0$. Beplaal de particuliere oplossing $v(t)$ voor dat geval.

(c) Wat is de eind(evenwichts)snelheid van de shuttle?

3. Gegeven is de tweede-ode differentiaalvergelijking

$$6\frac{d^2y}{dx^2} - 36\frac{dy}{dx} - 42y = 0$$

met beginvoorwaarden

$$y(0) = 5 \quad \text{en} \quad y'(0) = 3$$

Bepaal de particuliere oplossing van dit tweede-orde probleem.

4. Gegeven is de eerste-orde DV

$$e^{-2x}\frac{dy}{dx} - e^{-2x}y = 1$$

(a) Schrijf deze DV in de vorm van een eerste-orde gewone differentiaalvergelijking:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

(b) Bepaal de integrerende factor $\mu(x)$

(c) Bepaal de algemene oplossing van deze DV.

(d) Is $y(0)=0$ een triviale oplossing van deze DV?

.... Einde........