Tentamen Wiskunde Blok II

25 januari 2018, 13:30-16:30

Succes!

1. Een kogel wordt van af het aardoppervlak vertikaal afgeschoten met een beginsnelheid $v(0) = v_0$ m/s. De kogel heeft een massa m [kg]. De kogel wordt afgeremd door twee krachten: de aantrekkingskracht van de aarde $F_g = mg$ [N] en de wrijvingskracht met de lucht $F_w = kv^2$ [N], waarin v de snelheid van de kogel is en k een evenredigheidsconstante. Via de wet van Newton kunnen we de volgende vergelijking opstellen:

$$F_{totaal} = ma = -(F_g + F_w),$$

waarin a [m/s^2] de totale vertraging (!) van de kogel voorstelt. Immers, hoe hoger de kogel komt, hoe langzamer: dus a moet negatief zijn. We weten dat als $x = x(t)$ de afgelegde weg van de kogel op het tijdstip t is, er geldt :

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{en} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Door bovenstaande definities te gebruiken kunnen we de wet van Newton ook schrijven als een gewone differentiaalvergelijking van de eerste-orde in termen van de snelheid $v = v(t)$:

$$m\frac{dv}{dt} = -(kv^2 + mg)$$

(a) Stel voor het gemak: $k = 1$, $g = 10$ en $m = 0.1$. Gebruik de methode van scheiden van variabelen om de algemene oplossing van deze DV te bepalen. Hint: **iedere methode** om de twee integralen te bepalen is toegestaan!

(b) Als $x = x(t)$ de afgelegde weg op een tijdstip t voorstelt, dan stel $v = v(t)$ de snelheid van de kogel op het zelfde tijdstip t voor. Dus we kunnen de snelheid OOK relateren aan de plaats $x = x(t)$: $v = v(x)$. Gebruik bovenstaande definities van de de snelheid en de versnelling **en** de kettingregel om te laten zien dat

$$\frac{dv(t)}{dt} = v(x)\frac{dv(x)}{dx}$$

en de differentiaalvergelijking nu de volgende vorm krijgt

$$0.1v\frac{dv}{dx} = -(v^2+1),$$

waarin $v = v(x)$ nu een functie van x is in plaats van een functie van t.

(c) Bepaal de algemene oplossing van bovenstaande DV in de vorm $x = x(v)$ met behulp van een u-substitutie. Dat is namelijk het meest simpel!

(d) Indien de beginsnelheid op $x = 0$ gegeven is door $v(0) = v_0$, dan geldt er dus ook $x(v_0) = 0$: de kogel wordt op het grondniveau $x = 0$ afgeschoten met een snelheid v_0. Toon aan dat de particuliere oplossing in dat geval gegeven wordt door

$$x(v) = \frac{1}{20}\ln\left|\frac{v_0^2+1}{v^2+1}\right|$$

(e) Hoe hoog komt de kogel maximaal in formule vorm?

(f) Geef een uitdrukking voor $v = v(x)$. Hint: alleen maar algebra...

2. Gebruik **herhaalde** partiële integratie om de volgende integraal te bepalen

$$\int x^2 e^{-x}\, dx$$

3. Gegeven is de volgende eerste-orde differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{1+e^x} = -y$$

(a) Schrijf deze DV in de vorm van een eerste orde lineaire DV:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

.

(b) Bepaal de integrerende factor.

(c) Bepaal de algemene oplossing van deze DV.

(d) Bepaal de particuliere oplossing indien de beginvoorwaarde is gegeven door $y(0) = 1$.

4. Gegeven is de functie

$$f(x,y) = \frac{3x^3y}{9x^6+y^2}$$

   (a) Bepaal de limietwaarde

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$$

   (b) Bepaal de partiële afgeleiden $\partial f/\partial x$ en $\partial f/\partial y$ in het punt (1,1).

   (c) Vervolgens zien we dat er een probleem is met deze functie in het punt $(0,0)$. Immers als we (0,0) invullen in $f(x,y)$ dan krijgen we $f(0,0) = \frac{\infty}{\infty}$. We gaan het gedrag van deze functie onderzoeken in het punt (0,0). Bepaal de limiet langs de oneindige verzameling rechte lijnen $y = mx$, met $m \in R/m \neq 0$. Wat weet je nu over het gedrag van $f(x,y)$ in (0,0)?

   (d) Bepaal de limiet langs de curve $y = x^3$. Wat weet je nu over het gedrag van deze functie in (0,0)?

5. Gegeven zijn de vectoren
   $\bar{u} =< 1,0,0 >$, $\bar{v} =< 0,1,0 >$ en $\bar{w} =< 1,1,4 >$.

   (a) Bepaal de hoek tussen de vectoren $\bar{u}$ en $\bar{w}$.

   (b) Bepaal $\bar{u} \times \bar{w}$

   (c) Beschrijf in woorden wat de wiskundige betekenis is van $\bar{u} \times \bar{w}$?

   (d) Iemand beweert dat de vectoren $\bar{u}$ en $\bar{v}$ loodrecht staan op de vector $< 0,0,1 >$. Klopt dat? Motiveer met wiskunde.

   (e) Bereken $||\bar{v} \times \bar{w}||$. Wat betekent dit in wiskundige zin?

   (f) Is het mogelijk om $\bar{u} \times (\bar{v} \cdot \bar{w})$ te berekenen? Waarom wel of waarom niet? Motiveer!