Eindtoets Basis Wiskunde/Fysica (GEO1-1120)

9 November 2017, 17:00-19:30 (17:00-20:00 voor studenten met extra tijd).

Regels

- Zet je SmartPhone of telefoon uit, en berg 'm uit zicht op.
- Geen koptelefoon en/of MP3-speler o.i.d.
- Het gebruik van formulebladen is toegestaan.
- Schrijf je naam en studentnummer op ieder blad dat je inlevert.

Aanwijzingen voor het succesvol maken van dit tentamen.

- Geef antwoord op iedere vraag (en alleen maar de vraag).
- Gebruik bij het oplossen van de problemen de ISEE methodiek.
- Werk in S.I.-eenheden en vergeet niet deze eenheden in je antwoord te noemen.
- Bij ieder onderdeel wordt aangegeven hoeveel punten je ermee kunt verdienen.

Opgave 1.

Je krijgt de taak om uit te zoeken of de kroon van de koning van echt goud is. De kroon heeft gewicht *w*. Als de kroon aan een touw hangt en compleet is ondergedompeld in water is de spankracht in het touw $f*w$ waar f een factor is.

a) 3 pt. Toon aan dat de relatieve dichtheid van de kroon (=dichtheid kroon gedeeld door dichtheid water) gelijk is aan 1/(1-f).
b) 2 pt. Wat stellen de limieten f-> 0 and f->1 fysisch voor?
c) 2 pt. De kroon heeft een gewicht van 25.00 N. Als het in het water hangt is de spankracht 22.80 N. Wat kun je zeggen over het materiaal waarvan de kroon gemaakt is? De dichtheid van goud is 19.30 10^3 kg/m^3 , dichtheid van lood is 11.35 10^3 kg/m^3 en de dichtheid van water is 1.000 10^3 kg/m^3.

Zie ommezijde

Opgave 2.

Een 2.50 kg zware bal hangt aan een licht touw dat een lengte heeft van 1.50 m. De bal wordt geraakt door een 5.00 kg zwaar object dat vlak voor de botsing horizontaal met 5.00 m/s beweegt. Bal en object bewegen na de botsing gezamenlijk verder.

a) 2 pt. Bereken de snelheid van de bal direct na de botsing.

b) 2 pt. Wat is de spankracht in het touw direct na de botsing?

Na de botsing bewegen de bal en het object verder tot het hoogste punt bereikt is.

c) 2 pt. Wat is de maximale hoek van het touw met de verticaal?

d) 4 pt. Wat moet de minimale snelheid van het object voor de botsing zijn dusdanig dat de bal en het object een volledige looping kunnen maken?

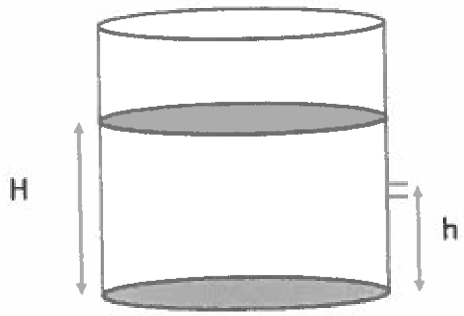
Opgave 3.

Je maakt een klein gaatje in de zijkant van een groot rond vat dat op de grond staat. Het vat is aan de bovenkant open (Figuur 1).

a) 2 pt. Bereken de snelheid waarmee het water het vat verlaat als functie van hoogte h hoven de grond waarop het gaatje gemaakt wordt. Het waterniveau in het vat heeft hoogte H. Neem aan dat de oppervlakte van het gaatje verwaarloosbaar klein is t.o.v. het oppervlakte van het vat.

b) 4 pt. Op welke hoogte moet je het gat aanbrengen dusdanig dat het water de grootste horizontale afstand heeft afgelegd als het de grond raakt? Geef een uitdrukking in termen van H.

c) 2 pt. Als we het gat aanbrengen halverwege het vat zal het vat gaan leeglopen en het waterniveau gaan dalen. Maak een schets van het waterniveau H als functie van de tijd en geef er een uitleg bij.



Figuur 1.

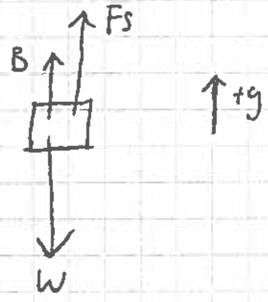
Succes!

Antwoordmodel eindtoets WiFy1 9 nov 2017

1a)

I evenwicht → 1e wet Newton

S Free body diagram (1)



$$F_s + B - W = 0$$

$W = \rho_k V_k g$ ρ_k = dichtheid kroon

$F_s = f \rho_k V_k g$ (1) V_k = volume kroon

$B = \rho_w V_k g$ ρ_w = dichtheid water

E

$$f\rho_k V_k g + \rho_w V_k g - \rho_k V_k g = 0$$

$$f\rho_k + \rho_w - \rho_k = 0$$

$$\rho_w = (1-f)\rho_k$$

dus $\rho_k/\rho_w = \dfrac{1}{1-f}$ (1)

E Dit klopt met de uitdrukking gegeven in de vraag

(½)

1b) als $f \to 0$ is er geen spankracht in het touw omdat kroon dan zelfde dichtheid heeft als water ($\rho_k/\rho_w = 1$) (½)

als $f \to 1$ is de spankracht gelijk aan het gewicht (½)
de opwaartse kracht is verwaarloosbaar klein (½)
Dat heb je als de dichtheid van de kroon veel groter is dan dichtheid water ($\rho_k/\rho_w \to \infty$)

1c) I $W = 25.00\,N$ $\quad f_s = 22.00\,N$

=> bereken f

S $f = \frac{f_s}{W} =$

$\rho_k/\rho_w = \frac{1}{1-f} \quad \Rightarrow \quad (1-f)\rho_k = \rho_w$

$\Rightarrow \quad \rho_k = \frac{\rho_w}{1-f}$ 1

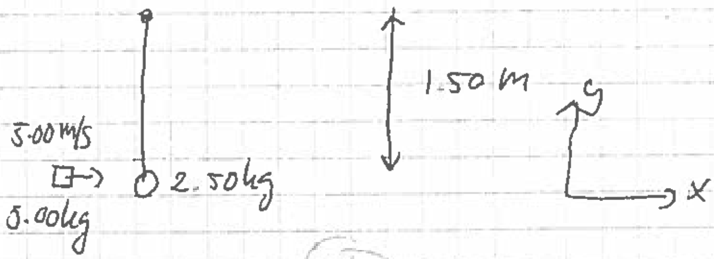
E $f = 0.912$

$\rho_k = 11.36\ 10^3\ kg/m^3$ ½

E deze dichtheid is bijna hetzelfde als de dichtheid van lood. ~~M~~ kroon bestaat voor allergrootste gedeelte uit lood, waarschijnlijk. In ieder geval geen manier goud. ½

Opg 2

a) I



botsing dus behoud van impuls. 1/2

geen behoud van energie!

S $\quad p_{x\,voor} = p_{x\,na}$ 1/2 $\qquad p_{y\,voor} = 0 = p_{y\,na}$ 1/2

$p_{x\,voor} = m_0 v_{x_0}$ $\qquad m_0$ = massa object = 5.00 kg

v_{x_0} = snelheid object = 5.00 m/s

$p_{x\,na} = (m_0 + m_b) v_{x\,na}$ $\qquad m_b$ = massa bal

$v_{x\,na}$ = gevraagde snelheid

E $\quad v_{x\,na} = \dfrac{m_0 v_{x_0}}{m_0 + m_b}$ 1/2

$v_{x\,na} = 3.33$ m/s

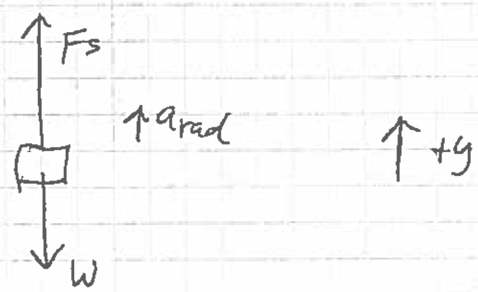
E $\quad$ er is geen energiebehoud $\quad \frac{1}{2} m_0 v_{x_0}^2 > \frac{1}{2}(m_0 + m_b) v_{x\,na}^2$

b) I $\quad$ spankracht in het touw

er is sprake van cirkelbeweging → radiële versnelling

tweede wet van Newton $\quad \Sigma F = m a_{rad}$ 1/2

S $\quad$ FBD 1/2



$F_s - W = m a_{rad}$

$a_{rad} = \dfrac{v_{x\,na}^2}{R}$ 1/2 $\qquad R = 1.50$ m

E $\quad F_s = W + m a_{rad}$

$$= mg + m\frac{v_{x_{na}}^2}{R}$$

$$= 7.50\ [9.81 + 7.407]$$

$$= 129\ N$$

1/2

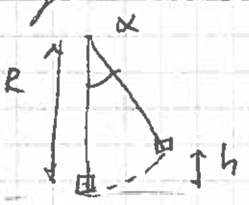
E $\quad F_s > W$, byna 2x zo groot.

c) I maximale hoek?

behoud van energie toepassen
op hoogste punt geen kinetische energie

1/2

S schets



nulniveau potentiële energie

behoud energie

$$\tfrac{1}{2} m v_{x_{na}}^2 = mgh$$

$$h = \frac{v_{x_{na}}^2}{2g}$$

1/2

$$\cos\alpha = \frac{R-h}{R}$$

1/2

E $\quad h = 0.566\ m$ $\qquad \cos\alpha = 0.622$

1/2

$$\alpha = 51.5^{\circ}$$

E $\quad$ check dimensies

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{[m/s]^2}{[m/s^2]} = \frac{[m^2/s^2]}{[m/s^2]} = [m]$$

$$\cos\alpha = \frac{R-h}{R} = \frac{[m]}{[m]} = \text{dimensieloos}$$

Opg 2d)

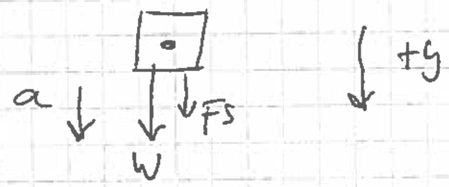
I om looping te maken moet snelheid op hoogste punt niet nul zijn, want dan valt systeem naar beneden

1 op hoogste punt 2e wet Newton

2 van laagste naar hoogste behoud van energie

3 botsing: behoud van impuls

S FBD hoogste punt



1)

$W + F_s = m a_{rad}$

minimale snelheid $F_s = 0$ 2

dus $W = m a_{rad}$

$$mg = \frac{m V_{top}^2}{R} \Rightarrow V_{top}^2 = gR \quad *$$

2) behoud energie

$$mgh + \tfrac{1}{2} m V_{top}^2 = \tfrac{1}{2} m V_{x\,na}^2$$

potentiële energie nul op laagste niveau

$h = 2R$

uit *

Dus

$$mg2R + \tfrac{1}{2} m g R = \tfrac{1}{2} m V_{x\,na}^2$$

1

dus $V_{x\,na} = \sqrt{5gR}$

3) $m_o V_{x\,voor} = (m_o + m_b) V_{x\,na}$

$$V_{x\,voor} = \frac{m_o + m_b}{m_o} V_{x\,na}$$

E $V_{x\,voor} = \frac{m_o + m_b}{m_o} \sqrt{5gR} = \underline{12.07 \text{ m/s}}$ 1

E groter dan 5.00 m/s, klopt.

opg2d)

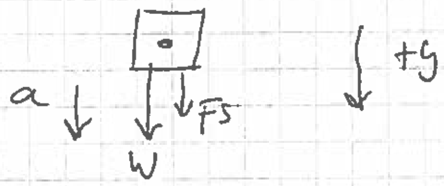
I om looping te maken moet snelheid op hoogste punt niet nul zijn, want dan valt systeem naar beneden

1 op hoogste punt 2e wet Newton

2 van laagste naar hoogste behoud van energie

3 botsing: behoud van impuls

S FBD hoogste punt



1)

$W + F_S = m a_{rad}$

minimale snelheid $\quad F_S = 0$ (2)

dus $\quad W = m a_{rad}$

$$mg = \frac{m v_{top}^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v_{top}^2 = gR \quad *$$

2) behoud energie

$$mgh + \tfrac{1}{2} m v_{top}^2 = \tfrac{1}{2} m v_{x_{na}}^2$$

potentiële energie nul op laagste niveau

$h = 2R$

uit *

Dus $$mg2R + \tfrac{1}{2} mgR = \tfrac{1}{2} m v_{x_{na}}^2$$

dus $\quad V_{x_{na}} = \sqrt{5gR}$ (1)

3) $m_o V_{x_{voor}} = (m_o + m_b) V_{x_{na}}$

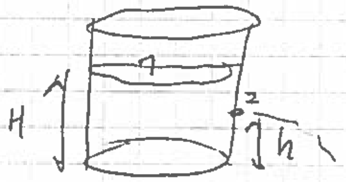
$$V_{x_{voor}} = \frac{m_o + m_b}{m_o} V_{x_{na}}$$

E $\quad V_{x_{voor}} = \frac{m_o + m_b}{m_o} \sqrt{5gR} = \underline{12.07 \text{ m/s}}$ (1)

E groter dan 5.00 m/s, klopt.

Opg 3

a) I



- wet van Bernoulli toepassen. ½
- omdat vat heel groot is is snelheid bovenaan verwaarloosbaar
- vat is open dus druk bovenkant vat en bij gat is gelijk.

S $\frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g H + P_1 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g h + P_2$

1

$\left.\begin{array}{l} V_1 \approx 0 \\ P_1 = P_2 \end{array}\right\}$ $\rho g H = \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g h$

E $\rho g(H-h) = \frac{1}{2}\rho V_2^2$

$V_2 = \sqrt{2g(H-h)}$ ½

E hoe groter H-h hoe sneller het water het vat verlaat

b) I - kinematica
- bernoulli uit opg 3a
- max afstand

S positie waterdeeltje

½ $x = V_2 \cdot t$ $V_2 \rightarrow$ zie 3a

$y = y_0 + V_{0y} t - \frac{1}{2}gt^2$

$= h - \frac{1}{2}gt^2$

grond raken $\Rightarrow$ $y = 0$ 1

dus $h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

dus $x = V_2 \cdot t = \sqrt{2g(H-h)} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Wat is x_{max}? $\frac{dx}{dh} = 0$

E $x(h) = \sqrt{\frac{2g(H-h)2h}{g}} = \sqrt{\frac{4g(H-h)h}{g}}$ (1)

$= \sqrt{\frac{4g(Hh-h^2)}{g}} = \sqrt{4(Hh-h^2)}$

$\cancel{\frac{dx}{dh} = \frac{\frac{1}{2}\, 2\sqrt{g}\,(H-2h)}{\sqrt{4g(Hh-h^2)}}}$ (1/2)

$\frac{dx}{dh} = \frac{\frac{1}{2}\, 2\,(H-2h)}{\sqrt{4(Hh-h^2)}}$

$\frac{dx}{dh} = 0$ als $H-2h=0$ (1)

dus $\boxed{h = \frac{H}{2}}$

E als gat bovenin zit heeft water veel tijd om te vallen en om ver te komen, maar snelheid is heel klein. Als gaatje onderin zit stroomt het water er met grote snelheid uit, maar bereikt het meteen de grond. Optimum is halverwege.

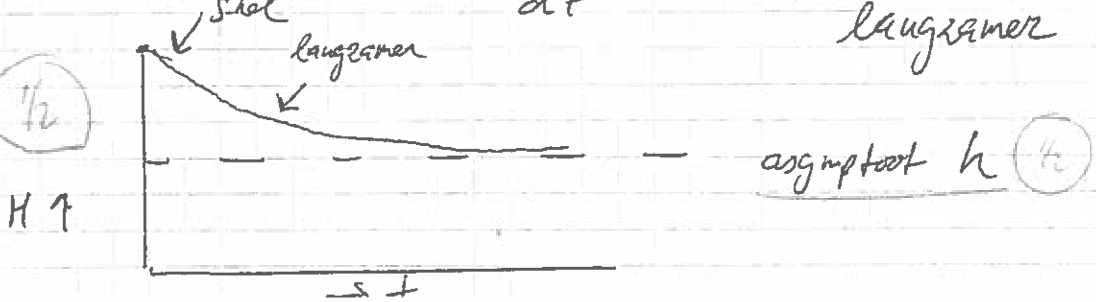
C

I als waterniveau daalt wordt $H-h$ kleiner en dus wordt stroomsnelheid kleiner (1/2)

vanwege continuiteit $A_{opp} \frac{dH}{dt} = A_{gat} V$ (1/2)

V wordt kleiner dus $\frac{dH}{dt}$ ook → Daalt steeds langzamer

(1/2)



(1/2)