# Tussentoets differentiaalvergelijkingen

Donderdag 21 december 2006
15:00 - 17:00

1. Een kogel met mass $m$ wordt vanaf het aardoppervlak vertikaal omhoog geschoten. De kogel wordt afgeremd door de zwaartekracht $F_g = mg$ en door de wrijving met de lucht. Die wrijvingskracht is evenredig met de snelheid $v$ van de kogel in het kwadraat: $F_w = cv^2$. Volgens de Wet van Newton geldt er dan de volgende differentiaalvergelijking

$$m\frac{dv}{dt} = -(kv^2 + mg)$$

waar in $g$ de versnelling vd zwaartekracht is en $k$ een evenredigheidsconstante.

(a) Voor het gemak nemen we de volgende (realistische..) waarden voor de constanten in de vergelijking: $k = 1$, $g = 10$ en $m = 0.1$. Los deze vergelijking op om aan te tonen dat de algemene oplossing gegeven wordt door

$$v(t) = \tan(C - 10t)$$

waarin $C$ een integratie constante is

(b) Indien de kogel op $t = 0$ met een snelheid $v(0) = 1$ afgeschoten wordt, geef dan de oplossing $v(t)$.

(c) Hoe lang doet de kogel er over om tot stilstand te komen?

(d) De snelheid is uiteraard ook een functie van de plaats $x$, dwz de door de kogel afgelegde weg. Toon aan dat de boven gegeven differentiaalvergelijking dan omgeschreven kan worden tot

$$0.1v\frac{dv}{dx} = -(v^2 + 1)$$

waarin $v = v(x)$

(e) Indien de kogel met een beginsnelheid $v_0$ op $x = 0$ wordt afgeschoten laat dan zien dat de oplossing van dit beginwaardeprobleem gegeven wordt door

$$v(x) = \sqrt{(1 + v_0^2)e^{-20x} - 1}$$

(f) Hoe hoog komt de kogel maximaal indien $v_0 = 1$?

2. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} - xe^y = 2e^y$$

(a) Geef de algemene oplossing van deze vergelijking

(b) Geef de oplossing van het beginwaardeprobleem $y(0) = 0$

3. Gebruik de integrerende factor methode om de volgende differentiaalvergelijking op te lossen

$$2\frac{dy}{dx} + 4y - \frac{2}{1 + e^{2x}} = 0$$

4. Een vat voldoet aan de volgende beschrijving: de verticale doorsnede is een parabool $h = ar^2$. De horizontale doorsnede op een hoogte $h$ is een cirkel met straal $r$. De totale hoogte van dit parabolische vat is $H = 1$. De bovenkant van het vat is open en onderin het vat zit een kleine uitstroomopening. Het vat is geheel gevuld met een vloeistof. Op $t = 0$ begint de vloeistof uit het vat te stromen. Het waterniveau in het vat voldoet aan de Wet van Torricelli

$$A(h)\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}$$

waarin $h = h(t)$ de hoogte van het vloeistof niveau is, $A(h)$ het oppervlak van de dwarsdoorsnede van het vat op hoogte $h$, en $k$ een evenredigheidsconstante.

(a) Bepaal de functie $A(h)$ voor dit vat

(b) Geef de algemene oplossing $h(t)$ van de Torricelli vergelijking indien $k = 1$ en $a = \pi$

(c) Geef de oplossing $h(t)$ voor het beginvoorwaardeprobleem $h(0) = H$

(d) Na hoeveel tijd is het vat leeg?

(e) Vervolgens beschouwen we een vat waarvan de dwarsdoorsnede gegeven is door $h = br^3$. Opnieuw is de hoogte van het vat $H = 1$. Bepaal voor dit vat de functie $A(h)$

(f) Indien $b = 1$ en $k = 1$, bepaal dan de algemene oplossing $h(t)$ van de Torricelli vergelijking voor dit vat

(g) Geef de oplossing van het beginwaardeprobleem $h(0) = H$

(h) **BONUS VRAAG** Indien de vorm van de dwarsdoorsnede van het vat gegeven wordt door $h = r^n$, waarbij $n \geq 1$, geef dan de algemene oplossing $h(t)$ in termen van de exponent $n$. Gebruik de eerder gegeven waarden voor de parameters.