

DIVA: Mid-term test. 16 maart 2012. Docent: C. thieulot.

Schrijf je naam en schrijf netjes. Licht je afleidingen toe. Er zijn 16 opgaven, allemaal 1 punt waard.

1. Vind de limiet van de rij

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

2. Leg uit wat de "ratio test" is.

3. Gebruik de divergentie test (preliminary test in Boas) om te beslissen of de volgende reeksen divergent zijn of verder getest moet worden

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^3 + a}}$$

4. Gebruik de ratio test om te bepalen of de volgende reeks convergeert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3 e^{3n}}{(3n)!}$$

5. Vind het convergentie interval voor de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

6. De Taylor series van  $f(x)$  rond  $x = x_0$  is:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 f''(x_0) + \dots + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0)$$

- a) Bepaal de Taylor reeks voor  $e^x$  rond  $x = 0$ .

- b) Bepaal vervolgens de Taylor reeks rond  $x = 0$  voor  $e^{-x^2}$ .

7. Los de volgende complexe vergelijking op voor  $x$  en  $y$

$$(2x - 3y - 2) + i(x + 5y + 1) = 7$$

8. Bepaal de absolute waarde van  $\frac{i\pi}{i-1}$

9. Schrijf in de vorm  $x + iy : z/\bar{z}$  als  $z = 3 - 2i$ .

10. Vind alle complexe wortels voor  $z = \sqrt[7]{i}$

11. Vind de gemiddelde waarde van  $\sin(2x)$  over het interval  $[6\pi, 7\pi]$

12. Gegeven is de complexe periodische functie  $z = f(t) = 7e^{-it/4}$ . Laat zien dat  $x(t) = \operatorname{Re}(z)$  en  $y(t) = \operatorname{Im}(z)$  een simpele harmonische beweging ondergaan. Bepaal de amplitude, periode, frequentie, en de amplitude van de snelheid van de beweging.

13. Bepaal of de volgende functies even of oneven zijn:

$$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = \ln x \quad f_3(x) = x^7 - x \quad f_4(x) = \exp(\cos x)$$

14. Gegeven is de functie

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Bereken  $a_n$  en  $b_n$  van de Fourier reeks. Wat is dan de Fourier reeks van  $f(x)$ ?

15. Wat is het verschil tussen een Fourier reeks en een Fourier integraal?

16. Gegeven dat de Fourier integraal van een functie  $f$  is

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \qquad g(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

Bepaal  $g(\alpha)$  van de functie

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & |x| > \pi/2 \end{cases}$$

en schrijf de Fourier integraal van  $f(x)$  op.