

DIVA: End-term 2010

Schrijf je naam en schrijf netjes. De punten per opgave staan vetgedrukt

- (1) 1. Gegeven is de 1e orde differentiaalvergelijking

$$y \, dy + (xy^2 - 8x) \, dx = 0$$

Los deze vergelijking op, met als randvoorwaarde $y(1) = 3$

- (1) 2. We hebben de volgende inhomogene 1e orde LDV:

$$\frac{dy}{dx} - y \cos x - \sin 2x = 0$$

Los eerst de homogene vergelijking op. Stel vervolgens de integratie constante C als een functie van x: $C(x)$. Los daarmee de inhomogene vergelijking op.

3. De algemene oplossing van een homogene 2e orde LDV met constante

coëfficiënten $y'' + py' + qy = 0$ (p, q constant) is $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

De inhomogene vergelijking $y'' + py' + qy = r(x)$ heeft dan als oplossing

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) \text{ met } y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

Als we nu eisen dat (1) $u' y_1 + v' y_2 = 0$ dan moet gelden (2) $u' y_1' + v' y_2' = r(x)$

- (1) a. Leid uit de gekoppelde vergelijkingen (1) en (2) uitdrukkingen af voor $u'(x)$ en $v'(x)$ en daarmee voor $u(x)$ en $v(x)$. Los daarmee (b) op, door eerst de homogene en dan de inhomogene vergelijking op te lossen.

- (1) b. Los op: $y'' + y' - 2y = 2e^x$

- (2) 4. Laplace: $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ met oplossingen $T = XY = \begin{Bmatrix} e^{ky} \\ e^{-ky} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix}$

Beschouw nu een half-oneindige plaat met breedte 12.5 cm (x). Alle zijden zijn 0° behalve langs de x-as waar de temperatuur $T = f(x) = 2x$. Vind de *steady-state* temperatuurverdeling van de plaat.

- (2) 5. Diffusie vergelijking: $\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t}$ met oplossingen $u = FT = \begin{Bmatrix} e^{-k^2 \alpha^2 t} \sin kx \\ e^{-k^2 \alpha^2 t} \cos kx \end{Bmatrix}$

We hebben een staaf met lengte l cm met een *steady state* T -verdeling voor $t < 0$ (dus Laplace), met $T_1 = -10^\circ$ links ($x = 0$) en $T_2 = 135^\circ$ ($x = l$). Vanaf $t = 0$

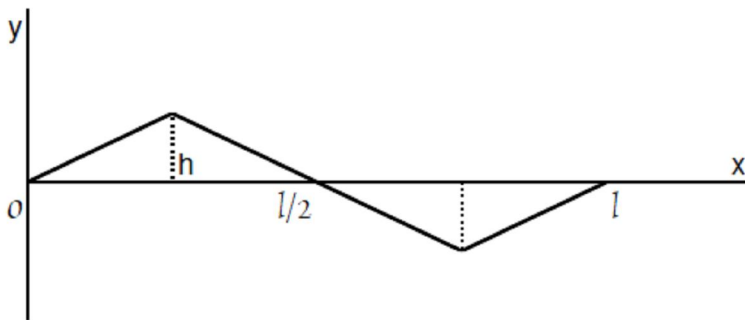
houden we de temperatuur links op $T_1 = 0^\circ$ en rechts op $T_2 = 45^\circ$. Vind de temperatuurverdeling $u(x,t)$ in de staaf op tijdstip t .

Voor de staaf in BOAS met begintemperaturen $(0,100)$ en eindtemperaturen $(0,0)$ was

de oplossing
$$u = \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} \sin(n\pi x/l)$$

(2) 6. Snelheidsvergelijking: $\nabla^2 y = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, met oplossing $y = XT = \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{Bmatrix}$

Neem een snaar met beginsnelheid nul (*plucked string*) en initiële verplaatsing als volgt:



Vind de verplaatsing als functie van x en t . Het gaat vooral om het opzetten van de juiste vergelijkingen, gebruikmakend van de gegeven rand- en beginvoorwaarden. Uitwerken en oplossen van de vergelijkingen levert natuurlijk wel nog meer op.

End-term 2010 - Solutions

1) $y dy + x(y^2 - 8) dx = 0$
(som 8.2.7 BOAS)

$y(1) = 3$

$\frac{y}{(y^2 - 8)} dy = -x dx \rightarrow$

Antwoord

$y^2 = 8 + e^{1-x^2}, K=1$

$y dy = \frac{1}{2} dy^2, \text{ dus}$

$\frac{1}{2} \int \frac{1}{(u-8)} du = \int -x dx$

$\ln(u-8) = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$

$u-8 = e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$\rightarrow y^2 = 8 + e^{c-x^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} y(1) = 3 \rightarrow 3^2 = 8 + e^{c-1} \\ \rightarrow e^{c-1} = 1 \rightarrow c=1 \end{array} \right.$

$\rightarrow y = \sqrt{8 + e^{1-x^2}}$

2) $\frac{dy}{dx} - y \cos x = \sin 2x$ (8.3.11. BOAS)

Ferst: $\frac{dy}{dx} - y \cos x = 0$

$\int \frac{1}{y} dy = \int \cos x \rightarrow \ln|y| = \sin x + C_1$

$\rightarrow y = C_2 e^{\sin x} = y_c$

Stel $y = C(x) e^{\sin x}$, dan: $y = C(x) e^{\sin x} = y_p$

Invoer:

$\frac{d}{dx} (C(x) e^{\sin x}) - C(x) e^{\sin x} \cos x = \sin 2x$

$C'(x) e^{\sin x} = \sin 2x$

$C'(x) = \frac{\sin 2x}{e^{\sin x}} \quad C(x) = \int \frac{\sin 2x}{e^{\sin x}} dx$

$= 2 \int \sin x \cos x e^{-\sin x} dx = 2 \int u e^{-u} du$
(met $u = \sin x$)

$$C(x) = 2 \int u e^{-u} du \xrightarrow[\text{integr.}]{\text{part.}} 2(-u e^{-u}) - 2 \int + e^{-u} du = 2(-u e^{-u}) - 2(-e^{-u} + C_2) = -2(\sin x + 1) e^{-\sin x} + C_2$$

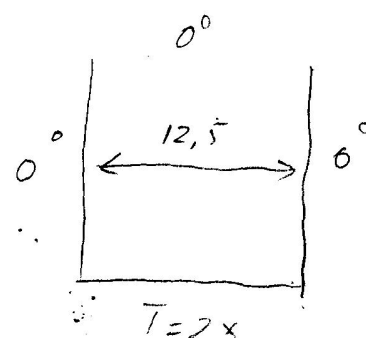
$$\rightarrow y = C(x) e^{\sin x} = -2(\sin x + 1) + C_2 e^{\sin x}$$

3a) zie aantekeningen + oplossing end-term 2009

zie laatste pagina voor
uitwerking van 3a en 3b

b). $y'' + y' - 2y = 2e^x$

zie aantekeningen + (opgave 19.3, Calculus.)

4).  $(a_n \cos kx + b_n \sin kx) (c_n e^{ky} + d_n e^{-ky})$

$y \rightarrow \infty, T=0$ e vervaalt

$x=0$ voor $T=0$ $\cos kx$ vervaalt

$x=2x$ voor $T=0$ $\sin kx = \sin \frac{n\pi x}{12.5}$

$$k = \frac{n\pi}{12.5}$$

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n\pi}{12.5} y} \sin \frac{n\pi x}{12.5} \quad [e^{\text{term}} = 1 \text{ voor } y=0 \text{ (rvw)}]$$

$$b_n = \frac{2}{12.5} \int_0^{12.5} 2x \sin \frac{n\pi x}{12.5} dx$$

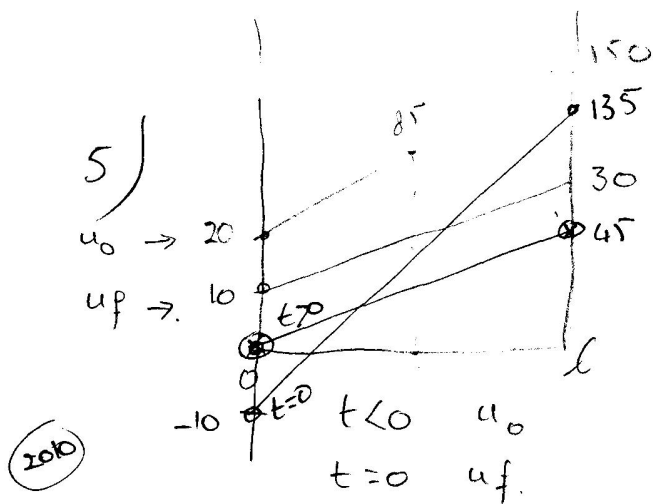
$$= \frac{4}{12.5} \left[-\frac{12.5}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{12.5} \right]_0^{12.5} - \int_0^{12.5} \frac{-12.5}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{12.5} dx$$

$$= \frac{4}{12.5} \cdot \frac{-(12.5)^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi \cdot 12.5}{12.5} - \left[\frac{-12.5}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{12.5} \right]_0^{12.5}$$

wordt sin-term, vervaalt.

$$= -\frac{50}{n\pi} \cos n\pi = \frac{50}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

$$T = \frac{50}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{\frac{n\pi}{12.5} y} \sin \frac{n\pi x}{12.5}$$



$$\begin{aligned}
 u_0 &= 20 + \frac{145}{l} x \\
 u_f &= 10 + \frac{20}{l} x \\
 0 + \frac{45}{l} x &= -10 + \frac{100}{l} x
 \end{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 & \\
 & \\
 &
 \end{aligned} \right\} u = u_0 - u_f$$

$x=0 \rightarrow T=0$ $e^{-k^2 x^2 t}$ $\cos kx$ variabel

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k^2 x^2 t} \sin kx, \quad k = \frac{n\pi}{l}$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left(10 + \frac{110}{l} x \right) \sin kx \, dx = \frac{20}{l} \int_0^l \sin kx \, dx + \frac{220}{l^2} \int_0^l x \sin kx \, dx$$

$$= \frac{20}{l} \left[-\frac{\cos kx}{k} \right]_0^l + \frac{220}{l^2} \left[-\frac{x}{k} \cos kx \right]_0^l - \frac{220}{l^2} \int_0^l \frac{1}{k} \cos kx \, dx$$

$$= -\frac{20}{l} \frac{1}{n\pi} [\cos n\pi - 1] + \frac{220}{l^2} \left[-\frac{l}{n\pi} \cos n\pi - 0 \right]$$

$$= + \frac{40}{n\pi} \Big|_{n \text{ odd}} + \frac{220}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
 \cos n\pi - 1 &= -2, \quad n \text{ odd} \\
 \cos n\pi &= (-1)^n \\
 -\cos n\pi &= (-1)^{n+1}
 \end{aligned}$$

$$u = \frac{220}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x - \frac{40}{\pi} \sum_{n \text{ odd}} \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

2010:

$$u = \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x + u_f$$

u_f toevoegen

Voor uitwerking opgave 6,
zie werkcollege opgave BOAS 13.4.4

$$3a) \quad u' y_1 + v' y_2 = 0 \quad (1)$$

$$u' y_1' + v' y_2' = r(x) \quad (2)$$

$$u' = -v' \frac{y_2}{y_1} \rightarrow \text{in (2): } -v' \frac{y_2}{y_1} y_1' + v' y_2' = r(x)$$

$$\rightarrow v' = \frac{y_1 r(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2}$$

$$\text{in (1): } u' = \frac{-y_2 r(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \rightarrow u(x) = \int \frac{-y_2 r(x)}{w(x)} dx$$

$$v(x) = \int \frac{y_1 r(x)}{w(x)} dx$$

$$b) \quad y'' + y' - 2y = 2e^x \rightarrow p=1, q=-2$$

$$m^2 + m - 2 = 0 \rightarrow (m-1)(m+2) = 0 \rightarrow m_1 = 1, m_2 = -2$$

$$\rightarrow y_c(x) = c_1 \underset{y_1}{e^x} + c_2 \underset{y_2}{e^{-2x}}$$

$$w(x) = -2e^x e^{-2x} - e^x e^{-2x} = -2e^{-x} - e^{-x} = -3e^{-x}$$

$$u(x) = \int \frac{-y_2 r(x)}{w(x)} dx = \int \frac{-e^{-2x} \cdot 2e^x}{-3e^{-x}} dx = \int \frac{2}{3} dx = \frac{2}{3}x + k_u$$

$$v(x) = \int \frac{y_1 r(x)}{w(x)} dx = \int \frac{e^x \cdot 2e^x}{-3e^{-x}} dx = \int -\frac{2}{3} e^{3x} dx = -\frac{2}{9} e^{3x} + k_v$$

$$y_p(x) = u y_1 + v y_2 = \frac{2}{3} x e^x - \frac{2}{9} e^{3x} e^{-2x} = \frac{2}{3} x e^x - \frac{2}{9} e^x$$

$$\rightarrow y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \frac{2}{3} x e^x - \frac{2}{9} e^x$$