

DIVA: End-term 2011

Schrijf je naam en schrijf netjes. De punten per opgave staan vetgedrukt

- (1) 1. Gegeven is de 1e orde differentiaalvergelijking

$$2 \frac{dy}{dx} = 3(y-2)^{1/3}$$

Los deze vergelijking op, met als randvoorwaarde $y(1) = 3$

Given differential equation is

$$2y' = 3(y-2)^{1/3}$$

$$\text{Or, } 2 \frac{dy}{dx} = 3(y-2)^{1/3}$$

$$\text{Or, } \frac{dy}{(y-2)^{1/3}} = \frac{3}{2} dx$$

Integrating both sides we have,

$$\int \frac{1}{(y-2)^{1/3}} dy = \frac{3}{2} \int dx$$

$$\text{Or, } \int (y-2)^{-1/3} dy = \frac{3}{2} x + C, \quad C \text{ is an arbitrary constant.}$$

$$\text{Or, } \frac{(y-2)^{2/3}}{2/3} = \frac{3}{2} x + C$$

$$\text{Or, } (y-2)^{2/3} = x + A, \text{ where } A = \frac{2C}{3}$$

$$\text{Or, } y-2 = (x+A)^{3/2}$$

$$\text{Or, } y = 2 + (x+A)^{3/2} \quad \text{--- (1)}$$

Which is the required solution containing one arbitrary constant.

Now $y = 3$ when $x = 1$

From (1)

$$(3-2)^{2/3} = 1 + A$$

$$\text{Or, } A = 0$$

Therefore, the particular solution is $y = 2 + x^{3/2}$.

- (1) 2. We hebben de volgende inhomogene 1e orde LDV:

$$\frac{dy}{dx} + (2xy - xe^{-x^2}) = 0$$

Los eerst de homogene vergelijking op. Stel vervolgens de integratie constante C als een functie van x: C(x). Los daarmee de inhomogene vergelijking op.

$$dy + (2xy - xe^{-x^2})dx = 0$$

$$\text{Or, } \frac{dy}{dx} = xe^{-x^2} - 2xy$$

$$\text{Or, } \frac{dy}{dx} + 2x \cdot y = xe^{-x^2}$$

This is linear in y. Here $P=2x$ and $Q=xe^{-x^2}$

Homogeen:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0 \Rightarrow \frac{1}{y} dy = -2x dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -2x dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -x^2 + C_1 \Rightarrow y_c = C_2 e^{-x^2}$$

Inhomogeen: dus stel nu $y = C(x)e^{-x^2}$, dan invullen geeft:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2} \Rightarrow$$

$$C'(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2} \Rightarrow C'(x) = x \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_3 \Rightarrow$$

$$y_p = (\frac{1}{2}x^2 + C_3)e^{-x^2}$$

$$y = y_c + y_p = C_2 e^{-x^2} + (\frac{1}{2}x^2 + C_3)e^{-x^2} = C_4 e^{-x^2} + \frac{1}{2}x^2 e^{-x^2}$$

3. De algemene oplossing van een homogene 2e orde LDV met constante

coëfficiënten $y'' + py' + qy = 0$ (p, q constant) is $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

De inhomogene vergelijking $y'' + py' + qy - 2y = r(x)$ heeft dan als oplossing

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) \text{ met } y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

Je kunt echter ook proberen om een oplossing voor y_p te 'raden'. Doe dat eens voor de volgende twee inhomogene differentiaalvergelijkingen, maar bepaal eerst de complementaire oplossing y_c .

Hint: probeer $y_p = Ax^n e^{bx}$ met $n = 0, 1, 2$ en b een geschikte waarde.

(1) a. Los op: $y'' + y' - 2y = e^{2x}$

Solution: Given equation is $y'' + y' - 2y = e^{2x}$ ----- (1)

The operator form is $(D^2 + D - 2)y = e^{2x}$ where $D = \frac{d}{dx}$

The auxiliary equation $m^2 + m - 2 = 0$

$$\Rightarrow (m+2)(m-1) = 0$$

$$\Rightarrow m = -2, 1$$

$$\Rightarrow y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

Probeer eerst voor $n = 0$:

$$\Rightarrow \text{by formula, } y_p = e^{\alpha x} Q_n(x) = e^{2x} A \text{ ----- (2)}$$

$$\Rightarrow y_p' = 2Ae^{2x}$$

$$y_p'' = 4Ae^{2x}$$

y_p is the particular solution of (1), $y_p'' + y_p' - 2y_p = e^{2x} \rightarrow (3)$

$$4Ae^{2x} + 2Ae^{2x} - 2e^{2x}A = e^{2x}$$

$$\Rightarrow 4Ae^{2x} = e^{2x}$$

$$\Rightarrow 4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{By (2), } y_p = \frac{1}{4}e^{2x}$$

Conclusion: The general solution of (1) is $y = y_c + y_p$

$$\Rightarrow y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x}, \text{ which agree with the computer solution.}$$

(1) b. Los op: $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$

Aim: To find $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$ ----- (1)

Solution: The operator form of (1) is

$$(D^2 - D - 2)y = 3e^{2x}$$

Auxiliary Equation is $m^2 - m - 2 = 0$

$$\Rightarrow (m-2)(m+1) = 0$$

$$\Rightarrow m = 2, -1$$

$$\Rightarrow y_c = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

Probeer voor $n = 0$ (lukt niet), dan voor $n = 1$:

$$\Rightarrow y_p = xe^{\alpha x} A \text{ ----- (2)}$$

$$\Rightarrow y_p = xe^{2x} A$$

$$\Rightarrow y'_p = A \left[x(2e^{2x}) + e^{2x} \cdot 1 \right]$$

$$\Rightarrow y'_p = A \left[x(2e^{2x} + e^{2x}) \right]$$

$$\Rightarrow y''_p = A \left[2x(2e^{2x}) + e^{2x}(2 \cdot 1) + 2e^{2x} \right]$$

$$\Rightarrow y''_p = A \left[4xe^{2x} + 4e^{2x} \right]$$

y_p is the particular solution (1),

$$\Rightarrow y''_p - y'_p - 2y_p = 3e^{2x}$$

$$\Rightarrow 4Axe^{2x} + 4Ae^{2x} - 2Axe^{2x} - Ae^{2x} - 2Axe^{2x} = 3e^{2x}$$

$$\Rightarrow 3Ae^{2x} = 3e^{2x} \Rightarrow A = 1$$

$$\Rightarrow y_p = xe^{2x} \cdot 1 \text{ (by (2))}$$

Conclusion: The general solution of (1) is $y = y_c + y_p$

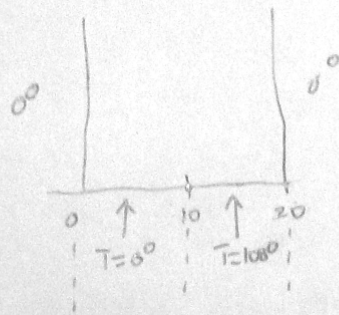
$\Rightarrow y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + xe^{2x}$, which agree with the computer solution.

(2) 4. Laplace: $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ met oplossingen $T = XY = \begin{Bmatrix} e^{ky} \\ e^{-ky} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix}$

Beschouw een half-oneindige plaat met breedte 20 cm (x). Alle zijden zijn 0° behalve langs de x-as waar de temperatuur $T = 0^\circ$ voor $0 < x < 10$ en $T = 100^\circ$ voor $10 < x < 20$. Vind de *steady-state* temperatuurverdeling van de plaat. Zet de juiste vergelijkingen netjes op adhv. de randvoorwaarden. Antwoord:

Ktra

13.2.2



Wederom! $y \rightarrow \infty$ dan $T \rightarrow 0$ e^{ky} termen vallen af.
 $x=0$ dan $T=0$ $\cos kx$ termen vallen af.
 $x=20$ dan $T=0$ $\sin kx = \sin \frac{n\pi}{20} x$, $k = \frac{n\pi}{20}$

$$\text{Als } y=0 \text{ dan } T = \sum_n b_n \sin \frac{n\pi}{20} x = \begin{cases} 0 & 0 < x < 10 \\ 100 & 10 < x < 20 \end{cases}$$

$$T_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n\pi}{20} y} \sin \frac{n\pi}{20} x \Rightarrow$$

$$b_n = \frac{2}{20} \int_0^{10} 0 \cdot \sin kx dx + \frac{2}{20} \int_{10}^{20} 100 \cdot \sin \frac{n\pi}{20} x dx$$

$$= -\frac{200}{20} \frac{20}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{20} \Big|_{10}^{20} = -\frac{200}{n\pi} \left(\cos n\pi - \cos \frac{1}{2} n\pi \right)$$

$$= -\frac{200}{n\pi} \left((-1)^n - (-1)^{n-1} \right) \text{ dus!}$$

$$\text{dan: } T = -\frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\cos n\pi - \cos \frac{1}{2} n\pi) e^{-\frac{n\pi}{20} y} \sin \frac{n\pi}{20} x$$

$n=1$	-1
$n=2$	$+1 - (-1) = 2$
$n=3$	-1
$n=4$	$+1 - 1 = 0$
$n=5$	-1
$n=6$	$+1 - (-1) = 2$
$n=7$	-1
$n=8$	0

$-1, 2, -1, 0$ etc.

$$\text{of ook: } T = \frac{200}{\pi} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd } n}}^{\infty} \frac{1}{n} - 2 \sum_{\substack{k=0 \\ n=2+4k}}^{\infty} \frac{1}{k} \right) \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi}{20} y} \sin \frac{n\pi}{20} x$$

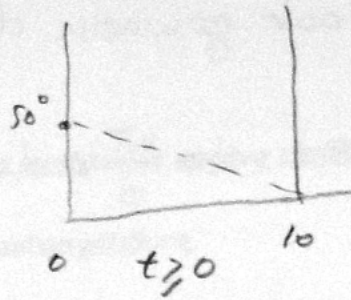
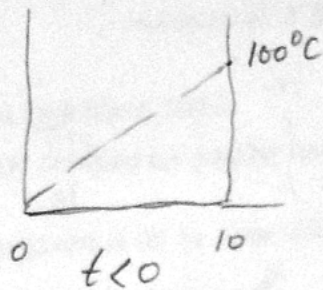
(2) 5. Diffusie vergelijking: $\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t}$ met oplossingen $u = FT = \begin{cases} e^{-k^2 \alpha^2 t} \sin kx \\ e^{-k^2 \alpha^2 t} \cos kx \end{cases}$

We hebben een staaf met lengte 10 cm met een *steady state* T -verdeling voor $t < 0$ (dus Laplace), met $T_1 = 0^\circ$ links ($x = 0$) en $T_2 = 100$ ($x = l$). Vanaf $t = 0$ houden we de temperatuur links op $T_1 = 50^\circ$ en rechts op $T_2 = 0^\circ$. Vind de temperatuurverdeling $u(x, t)$ in de staaf op tijdstip t .

Voor de staaf van lengte l in BOAS met begintemperaturen $(0, 100)$ en eindtempera-

turen $(0, 0)$ was de oplossing $u = \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} \sin(n\pi x/l)$

5



$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \frac{100}{l} x = 10x \\ u_f &= 50\left(1 - \frac{x}{l}\right) = 50 - 5x \end{aligned} \right\} u = u_0 - u_f = 15x - 50$$

$u=0$ voor $x=0 \rightarrow \cos kx$ termen vervallen

$$u=0 \text{ voor } x=l \rightarrow \sin kx = \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \left(k = \frac{n\pi}{l} = \frac{n\pi}{10}\right)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x + u(x,0) \quad [= u_f]$$

$$u_0 - u_f = 15x - 50 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$\rightarrow b_n = \frac{2}{l} \int_0^l 15x \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x dx - \frac{2}{l} \int_0^l 50 \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

a) Kan je uitrekenen, maar eerst term weet je al (gegeven):
die is: $\frac{300}{n\pi} (-1)^{n+1}$. Nu tweede term nog:
(opgave 13.32 in Boas) die is $\begin{cases} -\frac{200}{n\pi}, & n \text{ is odd} \\ 0, & n \text{ is even.} \end{cases}$

$$\text{dus: } b_n = \frac{300}{n\pi} (-1)^{n+1} - \begin{cases} \frac{200}{n\pi} & n \text{ odd} \\ 0 & n \text{ even.} \end{cases} = \begin{cases} \frac{100}{n\pi}, & n \text{ odd} \\ -\frac{300}{n\pi}, & n \text{ even.} \end{cases}$$

Dit kan je slim schrijven als: $\left\{ \frac{300}{n\pi} (-1)^{n+1} + \frac{100}{n\pi} (-1)^n - \frac{100}{n\pi} \right\}$

$$\Rightarrow T(x,t) = 50 - 5x + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(300 \cdot (-1)^{n+1} + 100 (-1)^n - 100 \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}$$

b) Je kunt ook gewoon doorrekenen!

$$b_n = \frac{2}{10} \int_0^{10} 15x \cdot \sin \frac{n\pi}{10} x \cdot dx - \frac{2}{10} \int_0^{10} 50 \cdot \sin \frac{n\pi}{10} x \cdot dx$$

$$= 3 \int_0^{10} x \cdot \sin \frac{n\pi}{10} x \cdot dx - 10 \int_0^{10} \sin \frac{n\pi}{10} x \cdot dx$$

$$= \frac{30}{n\pi} \left[-x \cdot \cos \frac{n\pi}{10} x \right]_0^{10} + \frac{30}{n\pi} \int_0^{10} \cos \frac{n\pi}{10} x \cdot dx + \frac{100}{n\pi} \left[\cos \frac{n\pi}{10} x \right]_0^{10}$$

$$= -\frac{300}{n\pi} \cos n\pi + \frac{300}{(n\pi)^2} \left[\sin \frac{n\pi}{10} x \right]_0^{10} + \frac{100}{n\pi} [\cos n\pi - 1]$$

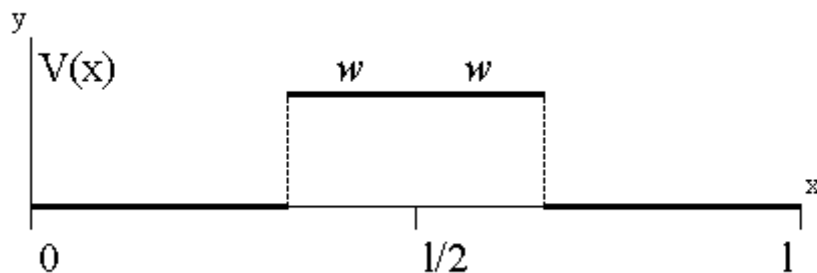
$$= \frac{300}{n\pi} (-1)^{n+1} + \frac{100}{n\pi} [(-1)^n - 1] - \begin{cases} \frac{200}{n\pi}, & n \text{ odd} \\ 0, & n \text{ even} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(x,t) = 50 - 5x + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{10} x \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{10}\right)^2 t}$$

$$= 50 - 5x + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (300 \cdot (-1)^{n+1} + 100 \cdot (-1)^n - 100) \sin \frac{n\pi}{10} x \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{10}\right)^2 t}$$

(2) 6. Snelheidsvergelijking: $\nabla^2 y = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, met oplossing $y = XT = \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{Bmatrix}$

Neem een snaar met met lengte l en initiëel recht ($y=0$). Op tijdstip $t=0$ krijgt de snaar een beginsnelheid $V(x) = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0}$, bv. door 'm aan te slaan. De snaar krijgt de volgende verplaatsing:



Vind de verplaatsing als functie van x en t . Het gaat vooral om het opzetten van de juiste vergelijkingen, gebruikmakend van de gegeven rand- en beginvoorwaarden. Uitwerken en oplossen van de vergelijkingen levert natuurlijk wel nog meer op. Antwoord:

$$y(x,t) = \frac{4hl}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi w}{l}\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi vt}{l}\right).$$

§13.4: 6

Solutions: Again we consider the 1-D wave equation for a string of length l with fixed ends and with the initial condition specified in terms of the initial velocity with zero initial displacement. The dependent variable is $y(x,t)$, the displacement at point x and time t and we know that the general solution of the wave equations has the form

$$y(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} \sin k_n x \\ \cos k_n x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin k_n vt \\ \cos k_n vt \end{Bmatrix}.$$

The fixed ends tell us the x dependence is given by the normal modes $\sin(n\pi x/l)$, while the nonzero initial condition on $\dot{y}$ tells us to use the $\sin(n\pi vt/l)$ terms for the time dependence (*i.e.*, the $\cos(n\pi vt/l)$ terms yield zero time derivatives at $t = 0$). Thus we have

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi vt}{l}\right),$$

§13.4: 6

Solutions: Again we consider the 1-D wave equation for a string of length l with fixed ends and with the initial condition specified in terms of the initial velocity with zero initial displacement. The dependent variable is $y(x,t)$, the displacement at point x and time t and we know that the general solution of the wave equations has the form

$$y(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sin k_n x \right\} \left\{ \sin k_n vt \right\}.$$

The fixed ends tell us the x dependence is given by the normal modes $\sin(n\pi x/l)$, while the nonzero initial condition on $\dot{y}$ tells us to use the $\sin(n\pi vt/l)$ terms for the time dependence (*i.e.*, the $\cos(n\pi vt/l)$ terms yield zero time derivatives at $t = 0$). Thus we have

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi vt}{l}\right),$$

$$\dot{y}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi v}{l} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \begin{cases} 0: 0 \leq x < \frac{l}{2} - w \\ h: \frac{l}{2} - w \leq x \leq \frac{l}{2} + w \\ 0: \frac{l}{2} + w < x \leq l \end{cases}$$

Following our usual procedures we use the initial conditions to solve for the coefficients,

Let op:

Hier is een foutje gemaakt, nl. de v ontbreekt in de uiteindelijke oplossing. Het antwoordenboek van BOAS geeft uiteindelijk wèl het goede antwoord !

$$4.6 \quad y = \frac{4hl}{\pi^2 v} \sum_{\substack{1 \\ \text{odd } n}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi w}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l}$$

Noot: BOAS gebruikt in het antwoord simpelweg de aanduiding *odd n*, terwijl in de eerdere oplossing de oneven n vertaald worden naar een oneven noemer in de eerste term na het sommatieteken.