

DIVA: End-term test 2014

Schrijf je naam en schrijf netjes. De punten per opgave staan vetgedrukt

- (1) 1. Gegeven is de niet-lineaire, wel separeerbare, 1e orde differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^2 + x}{x^2y - y} \quad \text{Los deze vergelijking op, met als randvoorwaarde } y(\sqrt{2}) = 0$$

Hint: gebruik substitutie om de integralen op te lossen

- (1) 2. We hebben de volgende inhomogene 1e orde LDV:

$$(x \ln x) \frac{dy}{dx} + y - \ln x = 0 \quad \text{Los eerst de homogene vergelijking op. Stel vervolgens}$$

de integratie constante C als een functie van x: $C(x)$. Los daarmee de inhomogene vergelijking op. *Hint: gebruik substitutie om de integraal op te lossen*

3. De algemene oplossing van een homogene 2e orde LDV met constante coëfficiënten $y'' + py' + qy - 2y = 0$ (p, q constant) is $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

De inhomogene vergelijking $y'' + py' + qy - 2y = r(x)$ heeft dan als oplossing

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) \quad \text{met } y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

Onder bepaalde voorwaarden blijkt dan dat:

$$u(x) = \int \frac{-y_2 r(x)}{W(x)} \quad \text{en} \quad v(x) = \int \frac{y_1 r(x)}{W(x)} \quad \text{met } W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

Hiermee kunnen we vrijwel iedere 2^e orde LDV oplossen (**5 stappen plan**)

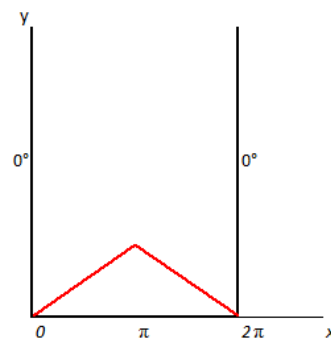
- (1) a. $y'' + 16y = 40e^{4x}$ (1) b. $y'' + 9y = 30 \sin 3x$

- (2) 4. **Laplace:** $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ met oplossingen $T = XY = \begin{Bmatrix} e^{ky} \\ e^{-ky} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix}$

Beschouw nu een half-oneindige plaat met breedte 2π cm (x). Alle zijden zijn 0° behalve langs de x-as waar de temperatuur gehouden wordt op:

$$T = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi \\ 2\pi - x, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

Vind de *steady-state* temperatuurverdeling van de plaat.



(2) 5. Diffusie vergelijking: $\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t}$ met oplossingen $u = FT = \begin{cases} e^{-k^2 \alpha^2 t} \sin kx \\ e^{-k^2 \alpha^2 t} \cos kx \end{cases}$

We hebben een plaat met dikte l cm met een *initial steady state* T -verdeling voor $t < 0$ met $T_1 = 50^\circ$ links ($x = 0$) en $T_2 = 150^\circ$ ($x = l$). Vanaf $t = 0$ houden we de temperatuur links op $T_1 = 150^\circ$ en rechts op $T_2 = 0^\circ$.

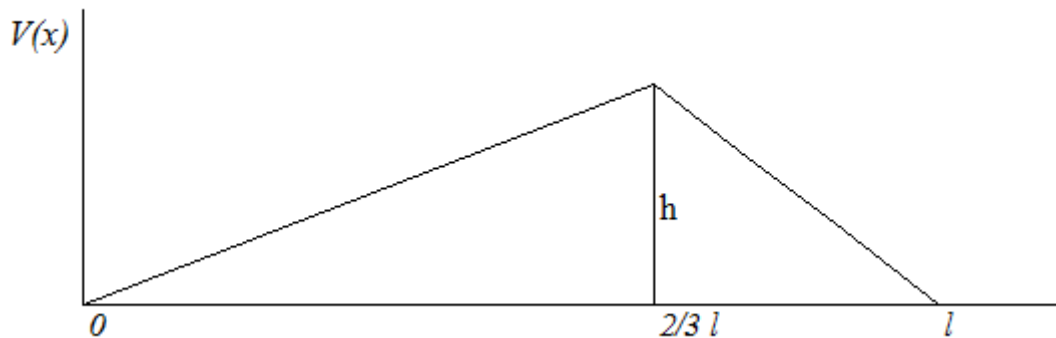
Vind dan de temperatuurverdeling $u(x, t)$ in de plaat op tijdstip t .

Hint: Voor de staaf van lengte l in BOAS met begintemperaturen $(0, 100)$ en eindtemperaturen

$(0, 0)$ was de oplossing: $u = \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} \sin(n\pi x/l)$

(2) 6. Snelheidsvergelijking: $\nabla^2 y = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, met oplossing $y = XT = \begin{cases} \sin kx \\ \cos kx \end{cases} \begin{cases} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{cases}$

Neem een snaar met met lengte l en initiëel recht ($y=0$). Op tijdstip $t = 0$ krijgt de snaar een beginsnelheid $V(x) = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0}$, bv. door 'm aan te slaan. De snaar krijgt de volgende verplaatsing:



Vind de verplaatsing als functie van x en t , netjes gebruikmakend van de gegeven rand- en begin-voorwaarden.

End-term 2014

①

8.2.6

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^2 + x}{x^2y - y} = \frac{x(2y^2 + 1)}{y(x^2 - 1)}$$

$$\rightarrow \int \frac{y}{2y^2 + 1} dy = \int \frac{x}{x^2 - 1} dx$$

$$\rightarrow \frac{1}{4} \int \frac{d(2y^2 + 1)}{2y^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - 1)}{x^2 - 1}$$

substituiere:

$$v = 2y^2 + 1 \rightarrow dv = 4y dy$$

$$u = x^2 - 1 \rightarrow du = 2x dx$$

$$\rightarrow \frac{1}{4} \ln(2y^2 + 1) = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) + C_1$$

$$\rightarrow \ln(2y^2 + 1) = 2 \ln(x^2 - 1) + C_2 = \ln(C_3(x^2 - 1)^2)$$

$$\rightarrow 2y^2 + 1 = C_3(x^2 - 1)^2 \text{ mit } y(1) = 0 \text{ folgt:}$$

$$1 = C_3(2 - 1)^2 = C_3$$

$$\text{dus: } 2y^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$$

②

8.3.8

$$(x \ln x) y' + y = \ln x$$

$$\text{1e) homogen: } x \ln x y' + y = 0$$

$$\rightarrow y' + \frac{1}{x \ln x} y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x \ln x} y$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{y} dy = - \int \frac{1}{x \ln x} dx = - \int \frac{1}{\ln x} d(\ln x) \quad (u = \ln x)$$

$$\rightarrow \ln y = - \int \frac{1}{u} du = - \ln u + C = - \ln(\ln x) + C = \ln(\ln x)^{-1} + C$$

$$\rightarrow y = \frac{C}{\ln x}$$

2^e) inhomogeen. Stel $y_p = \frac{C(x)}{\ln x}$, dan:

$$(x \ln x) \frac{dy}{dx} + y = \ln x \rightarrow$$

$$(x \ln x) \frac{d \frac{C(x)}{\ln x}}{dx} + \frac{C(x)}{\ln x} = \ln x$$

$$\cancel{\frac{x \ln x}{\ln x}} C'(x) - \cancel{\frac{x \ln x}{x (\ln x)^2}} C(x) + \frac{C(x)}{\ln x} = \ln x$$

$$\rightarrow x C'(x) = \ln x \rightarrow C'(x) = \frac{\ln x}{x} \rightarrow C(x) = \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$\rightarrow C(x) = \int \ln x d(\ln x) = \int u du = \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} (\ln x)^2$$

$$\rightarrow y_p = \frac{1}{2} \frac{(\ln x)^2}{\ln x} = \frac{1}{2} \ln x$$

$$\rightarrow y = y_c + y_p = \frac{C}{\ln x} + \frac{1}{2} \ln x$$

③ a) 8.6.8

$$y'' - 16y = 40e^{4x}$$

1) homogeen: $m^2 - 16 = 0 \rightarrow m_1 = 4, m_2 = -4$

$$y_c = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x} \quad \text{met } y_1 = e^{4x}, y_2 = e^{-4x}$$

2) Stel: $y_p = u(x)e^{4x} + v(x)e^{-4x}$ $W(x) = -4e^{4x} \cdot e^{-4x} - 4e^{-4x} \cdot e^{4x} = -8$

$$u(x) = \int \frac{-e^{-4x} \cdot 40e^{4x}}{-8} dx = \int 5 dx = 5x$$

$$v(x) = \int \frac{e^{4x} \cdot 40e^{-4x}}{-8} dx = \int -5 dx = -\frac{5}{8}x$$

$$\text{Dus: } y_p = 5xe^{4x} + \frac{5}{8}x e^{-4x} = 5xe^{4x} - \frac{5}{8}x e^{-4x}$$

$$\rightarrow y = y_c + y_p = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x} + 5xe^{4x} - \frac{5}{8}x e^{-4x}$$

laatste term: vervalt, want in 4 besloten

③ b) 8.6.18

$$y'' + 9y = 30 \sin 3x = \operatorname{Im} 30e^{3ix}$$

1) homogeen: $y'' + 9y = 0 \rightarrow m^2 + 9 = 0 \rightarrow m_{1,2} = \pm 3i$

$$y_c = C_1 e^{3ix} + C_2 e^{-3ix} = d_1 \cos 3x + d_2 \sin 3x$$

$$W(x) = -3ie^{3ix} \cdot e^{-3ix} - 3ie^{-3ix} \cdot e^{3ix} = -6i$$

$$u(x) = \int \frac{-e^{-3ix} \cdot 30e^{3ix}}{-6i} dx = \int \frac{5}{i} dx = -5ix$$

$$v(x) = \int \frac{e^{3ix} \cdot 30e^{-3ix}}{-6i} dx = \int -\frac{5}{i} dx = +\frac{5}{6}x$$

$$y_p = \operatorname{Im} \left[-5ix e^{3ix} + \frac{5}{6} e^{6ix} \cdot e^{-3ix} \right]$$

$$= \operatorname{Im} \left[-5ix e^{3ix} + \frac{5}{6} e^{3ix} \right]$$

$$= \operatorname{Im} \left[-5ix \cos 3x + 5x \sin 3x \right.$$

$$\left. + \frac{5}{6} \cos 3x + \frac{5}{6} i \sin 3x \right]$$

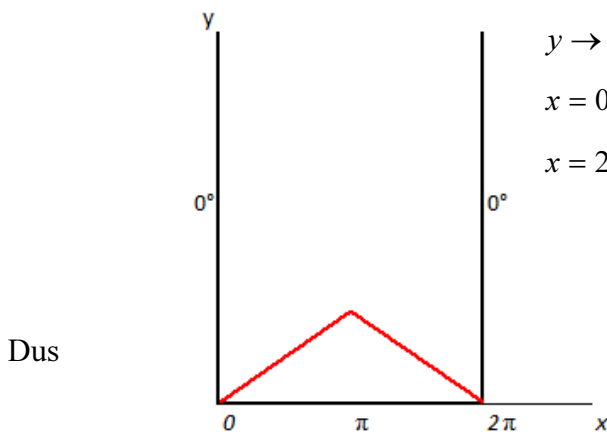
$$= \underbrace{-5x \cos 3x}_{\xi} + \underbrace{\frac{5}{6} \sin 3x}_{\text{besetzen in } d_2 \rightarrow d_3}$$

$$\begin{aligned} y = y_c + y_p &= d_1 \cos 3x + \left(d_2 + \frac{5}{6}\right) \sin 3x - \underbrace{5x \cos 3x}_{\xi} \\ &= d_1 \cos 3x + d_3 \sin 3x - \underbrace{5x \cos 3x}_{\xi} \end{aligned}$$

(2) 4. Laplace: $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ met oplossingen $T = XY = \begin{Bmatrix} e^{ky} \\ e^{-ky} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix}$

Beschouw nu een half-oneindige plaat met breedte 2π cm (x). Alle zijden zijn 0° behalve langs de x-as waar de temperatuur gehouden wordt op:

$T = f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi \\ 2\pi - x, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$ Vind de *steady-state* temperatuurverdeling van de plaat.



$y \rightarrow \infty \Rightarrow T \rightarrow 0$ dus e^{ky} termen vallen af

$x = 0 \Rightarrow T = 0$ dus $\cos kx$ termen vallen af

$x = 2\pi \Rightarrow T = 0$ dus

$\sin kx = \sin \frac{n\pi}{2\pi} x, \quad k = \frac{n}{2} \quad (k > 0)$

blijven over de $e^{-\frac{n}{2}y} \cdot \sin \frac{n}{2}x$ termen met nog te

bepalen coëfficiënten: $T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot e^{-\frac{n}{2}y} \cdot \sin \frac{n}{2}x$

Met $y = 0 \Rightarrow T = f(x)$ krijgen we dan $T_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n}{2}x = f(x)$. Dus:

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin kx \cdot dx = \frac{2}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} x \cdot \sin \frac{n}{2}x \cdot dx + \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x) \cdot \sin \frac{n}{2}x \cdot dx \right\}$$

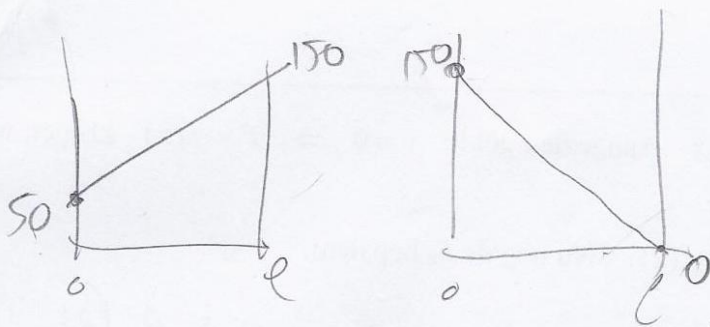
$$b_n = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[-\frac{2}{n}x \cdot \cos \frac{n}{2}x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{2}{n} \cos \frac{n}{2}x \cdot dx + \left[-\frac{4\pi}{n} \cos \frac{n}{2}x \right]_{\pi}^{2\pi} - \left[-\frac{2}{n}x \cdot \cos \frac{n}{2}x \right]_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{2}{n} \cos \frac{n}{2}x \cdot dx \right\}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[-\frac{2\pi}{n} \cdot \cos \frac{n\pi}{2} - 0 \right] - \left[\frac{-4}{n^2} \sin \frac{n}{2}x \right]_0^{\pi} + \left[0 + \frac{2\pi}{n} \cos \frac{n\pi}{2} \right] + \left[-\frac{4}{n^2} \sin \frac{n}{2}x \right]_{\pi}^{2\pi} \right\}$$

$$b_n = \frac{4}{\pi n^2} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{\pi n^2} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{8}{\pi n^2} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = \text{even} \\ \frac{8}{\pi n^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n = \text{odd} \end{cases}$$

Dus: $T = \frac{8}{\pi} \sum_{n=\text{odd}} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2} e^{-\frac{n}{2}y} \sin \frac{n}{2}x$

5



$$u_0 = 50 + \frac{100}{l}x \quad u_f = 150 - \frac{150}{l}x$$

$$u = u_0 - u_f = -100 + \frac{250}{l}x$$

De tweede term geeft: $-\frac{500}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k^2 x^2 t} \sin kx \quad k = \frac{n\pi}{l}$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l -100 \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot dx \quad \text{alleen 1^o term uitrekenen}$$

$$= -\frac{200}{l} \int_0^l \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx = -\frac{200}{l} \left[-\cos \frac{n\pi}{l} x \right]_0^l$$

$$= -\frac{200}{l} \left[-\frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} x \right]_0^l$$

$$= + \frac{200}{n\pi} [\cos n\pi - 1] = -\frac{400}{n\pi} \Big|_{n \text{ odd}}$$

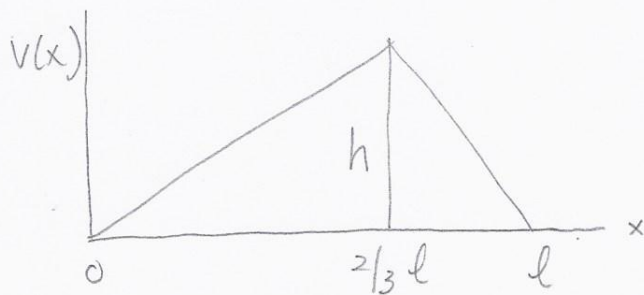
duis $u(x,t) = u_f - \frac{400}{\pi} \sum_{n \text{ odd}} \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x$

$$+ \frac{500}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

met: $u_f = 150 - \frac{150}{l}x$

Ook wel: $u(x,t) = u_f - \frac{300}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2/3}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x$

6



$$V(x) = \begin{cases} \frac{3h}{2l}x & 0 < x < \frac{2}{3}l \\ \frac{3h}{l}(l-x) & \frac{2}{3}l < x < l \end{cases}$$

Randvw. $y(0) = y(l) = 0 \rightarrow \cos kx$ weg en $k = \frac{n\pi}{l}$
 $\cos \omega t$ weg omdat $\frac{d}{dt}(\cos \omega t) = -\sin \omega t$, nul opt=0

$$\Rightarrow y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \cdot \sin \frac{n\pi V}{l}t$$

Op $t=0$: $\frac{dy}{dt} = V(x)$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \frac{n\pi V}{l} \cos \frac{n\pi V}{l}t \quad (\cos \text{ term is } 1 \text{ voor } t=0)$$

$$\frac{n\pi V}{l} b_n = \frac{2}{l} \left[\int_0^{\frac{2}{3}l} \frac{3h}{2l} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{\frac{2}{3}l}^l (l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right]$$

$$= \frac{2}{l} \left[\frac{3h}{2l} \left\{ \frac{-lx}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{l} \Big|_0^{\frac{2}{3}l} + \int_0^{\frac{2}{3}l} \frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right\} + \frac{3h}{l} \left\{ \frac{-(l-x)l}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{l} \Big|_{\frac{2}{3}l}^l - \int_{\frac{2}{3}l}^l \frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right\} \right]$$

$$= \frac{2}{l} \left[\frac{3h}{2l} \cdot \frac{-2l^2}{3n\pi} \cos \frac{2}{3}n\pi + \frac{l^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{2}{3}n\pi \cdot \frac{3h}{2l} + \frac{3h}{l} \cdot \frac{l^2}{n\pi} \cos \frac{2}{3}n\pi - \frac{3h}{l} \cdot \frac{l^2}{n^2\pi^2} (\sin n\pi - \sin \frac{2}{3}n\pi) \right]$$

$$= \frac{3h}{n^2\pi^2} \sin \frac{2}{3}n\pi + \frac{6h}{n^2\pi^2} \sin \frac{2}{3}n\pi = \frac{9h}{n^2\pi^2} \sin \frac{2}{3}n\pi$$

$$\rightarrow b_n = \frac{9h}{n^2\pi^2} \cdot \frac{l}{n\pi V} \sin \frac{2}{3}n\pi = \frac{9hl}{n^3\pi^3 V} \sin \frac{2}{3}n\pi$$

$$\rightarrow y(x,t) = \frac{9hl}{\pi^3 V} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{2}{3}n\pi \cdot \sin \frac{n\pi}{l}x \cdot \sin \frac{n\pi V}{l}t$$