

DIVA: End-term test 2013

Schrijf je naam en schrijf netjes. De punten per opgave staan vetgedrukt

- (1) 1. Gegeven is de niet-lineaire, wel separeerbare, 1e orde differentiaalvergelijking

$$2y^3 z \frac{dy}{dz} - 2z + 6 = 0 \text{ met } z > 0$$

Los deze vergelijking op, met als randvoorwaarde $y(1) = 2$

$$2y^3 \frac{dy}{dz} = \frac{2z-6}{z} = 0 \rightarrow \int 2y^3 dy = \int \left(2 - \frac{6}{z}\right) dz$$

$$\frac{2}{4} y^4 = 2z - 6 \ln z + C \quad \text{en met } y(1) = 2 \text{ wordt dit } \frac{1}{2} \cdot 2^4 = 2 \cdot 1 - 6 \ln 1 + C \rightarrow C = 6$$

$$\text{Dus: } y^4 = 2(2z - 6 \ln z + 6) \rightarrow y(x) = \sqrt[4]{4z - 12(\ln z - 1)}$$

- (1) 2. We hebben de volgende inhomogene 1e orde LDV:

$$2x \frac{dy}{dx} + y - 2x^{5/2} = 0$$

Los eerst de homogene vergelijking op. Stel vervolgens de integratie constante C als een functie van x: $C(x)$. Los daarmee de inhomogene vergelijking op.

Eerst homogene vergelijking:

$$2x \frac{dy}{dx} + y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2x} y = 0 \rightarrow \int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{1}{2x} dx \rightarrow \ln|y| = -\frac{1}{2} \ln|x| + C_1$$

$$\ln|y| = \ln|x^{-1/2}| + \ln C_2 \rightarrow y(x) = Cx^{-1/2} \quad \text{Stel nu } C = C(x) \text{ en vul in:}$$

$$2x \frac{dy}{dx} + y - 2x^{5/2} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2x} y = x^{3/2} \rightarrow \frac{dC(x)x^{-1/2}}{dx} + \frac{1}{2x} C(x)x^{-1/2} = x^{3/2}$$

$$\rightarrow C'(x)x^{-1/2} - \frac{1}{2}C(x)x^{-3/2} + \frac{1}{2}C(x)x^{-3/2} = x^{3/2}$$

$$\rightarrow C'(x) = x^{3/2} x^{1/2} \rightarrow C(x) = \int x^{4/2} dx = \frac{1}{3} x^3 + C_2$$

$$\rightarrow y(x) = C(x)x^{-1/2} = \frac{1}{3} x^{5/2} + C_2 x^{-1/2}$$

3. De algemene oplossing van een homogene 2e orde LDV met constante

coëfficiënten $y'' + py' + qy - 2y = 0$ (p, q constant) is $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

De inhomogene vergelijking $y'' + py' + qy - 2y = r(x)$ heeft dan als oplossing

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) \text{ met } y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

Als we nu eisen dat (1) $u'y_1 + v'y_2 = 0$ dan moet gelden (2) $u'y_1' + v'y_2' = r(x)$

- (2) a. Uit de gekoppelde vergelijkingen (1) en (2) kun je uitdrukkingen vinden voor $u'(x)$ en $v'(x)$ en daarmee voor $u(x)$ en $v(x)$. Het blijkt dan dat:

$$u(x) = \int \frac{-y_2 r(x)}{W(x)} \text{ en } v(x) = \int \frac{y_1 r(x)}{W(x)} \text{ met } W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

Hiermee kunnen we dan in principe iedere 2^e orde LDV oplossen, via het zgn.

5 stappen plan. Leg dat 5 stappen plan eens uit? Los dan op:

b. $y'' + y' - 2y = 2e^x$ c. $y'' + 6y' + 9y = 12e^{-x}$

a. 1) vind de (complementaire) oplossing van de homogene vergelijking $y_c(x)$

2) uit $y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2$ bereken $W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2$

3) bepaal $u(x) = \int \frac{-y_2 r(x)}{W(x)}$ en $v(x) = \int \frac{y_1 r(x)}{W(x)}$

4) Stel $y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2$ en los de inhomogene vergelijking op:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) \text{ ofwel } y(x) = (C_1 + u(x))y_1(x) + (C_2 + v(x))y_2(x)$$

5) Vind (eventueel) met behulp van de randvoorwaarden C_1 en C_2

b. $y'' + y' - 2y = 2e^x$ Eerst de homogene vergelijking oplossen:

$$y'' + y' - 2y = 0 \rightarrow m^2 + m - 2 = 0 \rightarrow (m-1)(m+2) = 0 \rightarrow m_1 = 1, m_2 = -2$$

$\rightarrow y_c = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ Vervolgens de inhomogene vergelijking oplossen:

Stel $y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2 = u(x)e^x + v(x)e^{-2x}$

$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = -2e^x \cdot e^{-2x} - e^x \cdot e^{-2x} = -3e^{-x} \text{ volgt:}$$

$$u(x) = \int \frac{-e^{-2x} \cdot 2e^x}{-3e^{-x}} = \int \frac{2}{3} dx = \frac{2}{3}x \text{ en } v(x) = \int \frac{e^x \cdot 2e^x}{-3e^{-x}} = -\frac{2}{3} \int e^{3x} dx = -\frac{2}{9}e^{3x} \text{ en dus}$$

$$y_p = uy_1 + vy_2 = \frac{2}{3}xe^x - \frac{2}{9}e^{3x}e^{-2x} = \frac{2}{3}xe^x - \frac{2}{9}e^x$$

$$y(x) = y_c + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{2}{3}xe^x \underbrace{\left\langle -\frac{2}{9}e^x \right\rangle}_{\text{vervalt}}$$

c. $y'' + 6y' + 9y = 12e^{-x}$ Eerst de homogene vergelijking oplossen:

$$y'' + 6y' + 9y = 0 \rightarrow m^2 + 6m + 9 = 0 \rightarrow (m+3)^2 = 0 \rightarrow m = -3$$

$$\rightarrow y_c = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} \quad \text{dus } y_1 = e^{-3x}, y_2 = x e^{-3x}$$

Vervolgens de inhomogene vergelijking oplossen met 3a:

$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{-3x}(e^{-3x} - 3x e^{-3x}) + 3e^{-3x} \cdot x e^{-3x} = e^{-6x} - 3x e^{-6x} + 3x e^{-6x} = e^{-6x}$$

$$u(x) = \int \frac{-x e^{-3x} 12 e^{-x}}{e^{-6x}} dx = -12 \int x e^{2x} dx = -12 \left(\frac{1}{2} x e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx \right)$$

$$\rightarrow u(x) = -12 \left(\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \right) = -6x e^{2x} + 3e^{2x}$$

$$v(x) = \int \frac{e^{-3x} 12 e^{-x}}{e^{-6x}} = 12 \int e^{2x} dx = 6e^{2x} \quad \text{en dus}$$

$$y_p = u y_1 + v y_2 = (-6x e^{2x} + 3e^{2x}) e^{-3x} + 6e^{2x} x e^{-3x} = -6x e^{-x} + 3e^{-x} + 6x e^{-x} = 3e^{-x}$$

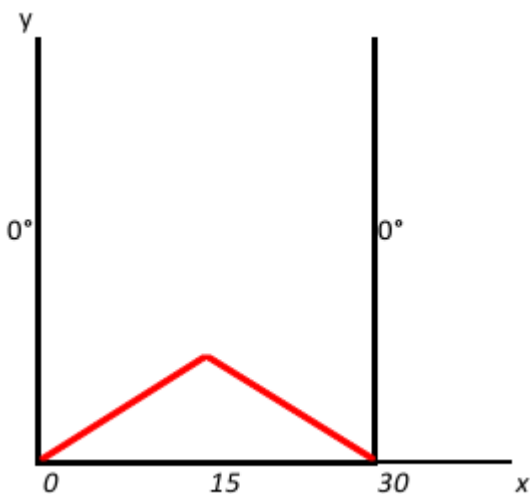
$$\text{Ofwel: } y(x) = y_c + y_p = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + 3e^{-x}$$

(2) 4. Laplace: $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ met oplossingen $T = XY = \begin{Bmatrix} e^{ky} \\ e^{-ky} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix}$

Beschouw nu een half-oneindige plaat met breedte 30 cm (x). Alle zijden zijn 0° behalve langs de x-as waar de temperatuur gehouden wordt op:

$$T = f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 15 \\ 30 - x, & 15 < x < 30 \end{cases}$$

Vind de *steady-state* temperatuurverdeling van de plaat.



$y \rightarrow \infty \Rightarrow T \rightarrow 0$ dus e^{ky} termen vallen af

$x = 0 \Rightarrow T = 0$ dus $\cos kx$ termen vallen af

$x = 30 \Rightarrow T = 0$ dus

$$\sin kx = \sin \frac{n\pi}{30} x, \quad k = \frac{n\pi}{30} \quad (k > 0)$$

Dus blijven over de $e^{-\frac{n\pi}{30}y} \cdot \sin \frac{n\pi}{30} x$ termen met nog te

bepalen coëfficiënten.

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot e^{-\frac{n\pi}{30}y} \cdot \sin \frac{n\pi}{30}x \quad \text{Aangezien geldt: } y = 0 \Rightarrow T = f(x) \text{ krijgen we}$$

$$T_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{30}x = f(x). \quad \text{Nu nog de } b_n \text{ bepalen:}$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin kx \cdot dx = \frac{2}{30} \left\{ \int_0^{15} x \cdot \sin \frac{n\pi}{30}x \cdot dx + \int_{15}^{30} (30-x) \cdot \sin \frac{n\pi}{30}x \cdot dx \right\}$$

$$b_n = \frac{1}{15} \left\{ \left[-\frac{30}{n\pi} x \cdot \cos \frac{n\pi}{30}x \right]_0^{15} - \int_0^{15} \frac{-30}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{30}x \cdot dx + \left[-\frac{30^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{30}x \right]_{15}^{30} - \left[-\frac{30}{n\pi} x \cdot \cos \frac{n\pi}{30}x \right]_{15}^{30} + \int_{15}^{30} \frac{-30}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{30}x \cdot dx \right\}$$

$$b_n = \frac{1}{15} \left\{ \left[-\frac{450}{n\pi} \cdot \cos \frac{n\pi}{2} - 0 \right] - \left[\frac{-900}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{30}x \right]_0^{15} + \left[0 + \frac{450}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \right] + \left[-\frac{900}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{30}x \right]_{15}^{30} \right\}$$

$$b_n = \frac{60}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{60}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{120}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = \text{even} \\ \frac{120}{(n\pi)^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n = \text{odd} \end{cases}$$

$$\text{Dus: } T = \frac{120}{\pi^2} \sum_{n=\text{odd}} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2} e^{-\frac{n\pi}{30}y} \sin \frac{n\pi}{30}x$$

(2) 5. Diffusie vergelijking: $\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t}$ met oplossingen $u = FT = \begin{cases} e^{-k^2 \alpha^2 t} \sin kx \\ e^{-k^2 \alpha^2 t} \cos kx \end{cases}$

We hebben een plaat met dikte l cm met een *initial steady state* T -verdeling voor $t < 0$ met $T_1 = 50^\circ$ links ($x = 0$) en $T_2 = 150^\circ$ ($x = l$). Vanaf $t = 0$ houden we de temperatuur links op $T_1 = 150^\circ$ en rechts op $T_2 = 50^\circ$. Vind de temperatuurverdeling $u(x, t)$ in de plaat op tijdstip t . *Hint*: het antwoord voor hetzelfde probleem in een huiswerkopgave voor T van $(0, 100)$ ($t < 0$) naar $(100, 0)$ (vanaf $t = 0$) was:

$$u = 100 - \frac{100x}{l} - \frac{400}{\pi} \sum_{\substack{\infty \\ \text{even } n}} \frac{1}{n} e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

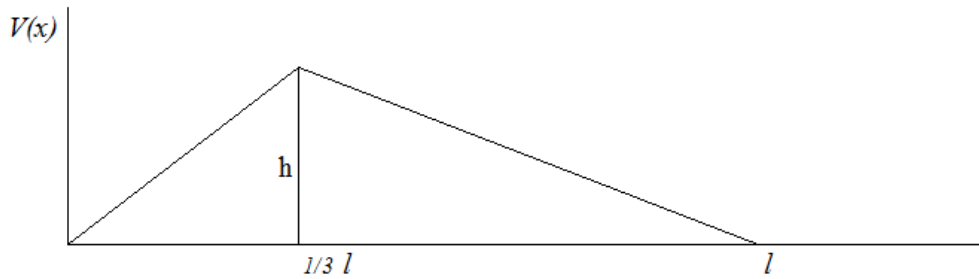
$$u_0 = 50 + \frac{100}{l}x, \quad u_f = 150 - \frac{100}{l}x \Rightarrow u = u_0 - u_f = -100 + \frac{200}{l}x$$

Dit is identiek aan de werkcollege opgave, dus alleen de u_f term aanpassen:

$$u = 150 - \frac{100}{l}x - \frac{400}{\pi} \sum_{\substack{\infty \\ \text{even } n}} \frac{1}{n} e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} \sin(n\pi x / l)$$

(2) 6. Snelheidsvergelijking: $\nabla^2 y = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, met oplossing $y = XT = \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{Bmatrix}$

Neem een snaar met met lengte l en initiëel recht ($y=0$). Op tijdstip $t = 0$ krijgt de snaar een beginsnelheid $V(x) = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0}$, bv. door 'm aan te slaan. De snaar krijgt de volgende verplaatsing:



Vind de verplaatsing als functie van x en t . Het gaat vooral om het opzetten van de juiste vergelijkingen, gebruikmakend van de gegeven rand- en beginvoorwaarden. Het vinden van de juiste oplossing levert overigens wel wat op.

Dit was BOAS opgave 13.4.7 die ik behandelde op het laatste extra (werk)college:

Here we consider the 1-D wave equation for a string of length l with fixed ends and with the initial condition specified in terms of the initial velocity (instead of the initial position). The dependent variable is $y(x,t)$, the displacement at point x and time t , and we know that the general solution of the wave equations has the form

$$y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \sin k_n x \\ \cos k_n x \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sin k_n vt \\ \cos k_n vt \end{matrix} \right\}$$

The fixed end tells us the x dependence is given by the normal modes $\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$, while the initial conditions on \dot{y} tell us to use the $\sin\left(\frac{n\pi vt}{l}\right)$ for the time dependence (i.e., the $\cos\left(\frac{n\pi vt}{l}\right)$ terms yield zero derivatives at $t=0$). Therefore we have

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi vt}{l}\right),$$

$$\dot{y}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi v}{l} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \begin{cases} \frac{3h}{l} : 0 \leq x < \frac{l}{3} \\ \frac{3h}{2l}(l-x) : \frac{l}{3} < x \leq l \end{cases}$$

Now we use the initial conditions to solve for the coefficients:

$$\dot{y}(x, 0) = \begin{cases} \frac{3h}{l}x, & 0 \leq x \leq \frac{l}{3} \\ \frac{3h}{2l}(l-x), & \frac{l}{3} \leq x \leq l \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n\pi v} \frac{2}{l} \left\{ \int_0^{l/3} dx \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \frac{3hx}{l} + \int_{l/3}^l dx \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \frac{3h}{2l}(l-x) \right\} \\ &= \frac{6h}{n\pi v l} \left\{ \left[-\frac{lx}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]_0^{l/3} + \left[-\frac{l(l-x)}{2n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]_{l/3}^l + \left[\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]_0^{l/3} - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]_{l/3}^l \right\} \\ &= \frac{6h}{n\pi v l} \left\{ \left[-\frac{l^2}{3n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right] + \left[\frac{l^2}{3n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right] + \left[\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right] + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right] \right\} \\ &= \frac{9hl}{(n\pi)^3 v} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

So finally we have

$$y(x, t) = \frac{9hl}{\pi^3 v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi vt}{l}\right)$$