DIVA: Mid-term test 1a (2013) met oplossingen

1. Vind de limiet van de rij $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})^{1/n}$ (*Hint: neem de ln*) Examples 2 & 3, blz. 5

Neem eerst de ln: $\ln(\frac{1}{n})^{1/n} = -\frac{1}{n}\ln n$ Bepaal nu de limiet - via de regel van L'Hôpital:

$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1} = 0$ en de gevraagde limiet wordt dus $e^0 = 1$

2. Gebruik de divergentie test ('preliminary test' in Boas) om te beslissen of de volgende reeksen divergent zijn of verder getest moeten worden:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n!+1}$ (1.5.5) b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)!}$ (1.5.6)

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!+1} = 1$ dus de reeks is divergent, niet verder testen

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ dus verder testen

3. Gebruik de ratio test om te bepalen of de volgende reeks convergeert:

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(2n)!}{(3n)!}$ (1.6.28)

Realiseer dat voor $n+1$: $(3n)! \quad \Rightarrow \quad (3(n+1))! = (3n+3)! = (3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!(2n+2)!}{(3n+3)!}\cdot\frac{(3n)!}{n!(2n)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(2n+1)(2n+2)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4n^3+\ldots}{27n^3+\ldots}\right| = \frac{4}{27} < 1$$

dus de reeks is convergent.

4. Vind het convergentie interval voor de machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty}(8)^{-n}(x^2-1)^n$ (1.10.19)

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x^2-1)^{n+1}}{8^{n+1}}\cdot\frac{8^n}{(x^2-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2-1}{8}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x^2-1| < 8 \quad \Rightarrow \quad |x^2| < 9 \quad \Rightarrow \quad |x| < 3$$

Voor de grenzen $|x| = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 3$ geldt dat $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^2-1}{8}\right| = 1$ (divergentie test) dus divergent.

Het convergentie interval wordt dus $-3 < x < 3$

5. Als je weet dat de Taylor reeks voor $\ln(1+x)$ rond **x** = 0 is:

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+....$$

wat is dan de Taylor reeks rond **x** = 0 voor $x^2\ln(1-x)$? (1.13.5)

Substitueer in de Taylor reeks hierboven $x\to -x$ en vermenigvuldig met x^2

$$x^2\ln(1-x)=x^2(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-....)=-x^3-\frac{x^4}{2}-\frac{x^5}{3}-\frac{x^6}{4}-....=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n}$$

6. a. Schrijf in de vorm $a+bi$: $\dfrac{1+z}{1-z}$ als $z=2-3i$ (2.5.23)

b. Bepaal de absolute waarde van $(2-3i)^4$ (2.5.32)

a) $\dfrac{1+z}{1-z}=\dfrac{1+2-3i}{1-2+31}=\dfrac{3-3i}{-1+3i}\cdot\dfrac{-1-3i}{-1-3i}=\dfrac{-3-9i+3i+9i^2}{1-9i^2}=\dfrac{-12-6i}{1+9}=-\dfrac{6}{5}-\dfrac{3}{5}i$

b) $\left|(2-3i)^4\right|=(\sqrt{2^2+3^2})^4=(\sqrt{13})^4=169$

7. Los op en schets in het complexe vlak de volgende vergelijkingen

(a) $x+iy=y+ix$ (2.5.39) (b) $|z+3i|=4$ (2.5.59)

a) $x=y \quad\wedge\quad y=x$ ofwel de lijn $y=x$

b) $|z+3i|=4 \;\Rightarrow\; |x+iy+3i|=4 \;\Rightarrow\; |x+i(y+3)|=4 \;\Rightarrow\; \sqrt{x^2+(y+3)^2}=4$

dus $x^2+(y+3)^2=4^2$ en dit is een cirkel met middelpunt *(0,-3)* en straal $r=4$

8. Test de complexe reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+i}{3-4i}\right)^{2n}$ voor convergentie (2.6.11)

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2+i)^{2(n+1)}}{(3-4i)^{2(n+1)}}\cdot\frac{(3-4i)^{2n}}{(2+i)^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2+i)^2}{(3-4i)^2}\right|=\frac{(\sqrt{5})^2}{(\sqrt{25})^2}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}<1 \quad \text{convergent}$$

9. Vind de convergentie cirkel voor de complexe machtreeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^3z^n}{(3n)!}$ (2.7.11)

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{((n+1)!)^3z^{n+1}}{(3(n+1))!}\cdot\frac{(3n)!}{(n!)^3z^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^3z}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^3z}{27n^3}\right|=\left|\frac{z}{27}\right| \;\Rightarrow\; |z|<27$$

10. Schrijf in de $x+iy$ vorm: $4e^{-8i\pi/3}$ (2.9.12)

Teken in het complexe vlak, en met wat Pythagoras kom je op *(-2,-2√3)* in x,y coordinaten ofwel *-2 - 2i√3* indien in de vorm $x+iy$ geschreven.