2009

DIVA: Mid-term test 1b

Schrijf je naam en schrijf netjes. Er zijn 10 opgaven, allemaal 1 punt waard

zie scan van handgeschreven oplosingen aan het eind

1. Gegeven is de complexe periodische functie $z = f(t) = 2e^{-it/2}$

7.2.8

Laat zien dat $x(t)$ = Re z en $y(t)$ = Im z een simpele harmonische beweging ondergaan, en bepaal de amplitude, periode, frequentie en amplitude van de snelheid van de beweging. (1)

7.4.12

2. Vind de gemiddelde waarde van $\cos^2 \frac{7\pi x}{2}$ over $(0, \frac{4}{7})$ (1)

Ex 1+2 pag. 353/354

3. Als je weet dat de Fourier reeks van

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \quad -\pi < x < 0 \\ f(x) &= 1, \quad -0 < x < \pi \end{aligned} \quad \text{gelijk is aan } f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$$

wat is dan de Fourier reeks voor $\begin{aligned} g(x) &= -1, \quad -\pi < x < 0 \\ g(x) &= 1, \quad -0 < x < \pi \end{aligned}$? (1)

Schets beide functies over enkele perioden, en leidt de eerste term van *g(x)* ($\frac{1}{2}a_0$) grafisch af uit de schets van deze functie. Klopt dit met je antwoord ?

Example pag. 359

4. We kunnen de reële sinussen en cosinussen van de Fourier reeks ook in complexe vorm schrijven: $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}$ met $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$ (2)

Bepaal nu de c_n van de functie $f(x)$ uit de opgave 3 hierboven, en laat zien dat de complexe vorm wederom gelijk is aan $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$

home 7.9.10

5. We kunnen in plaats van over een periode van 2π een Fourier reeks ook ontwikkelen over een willekeurige periode $\lambda = 2l$. We krijgen dan bv. voor a_n:

$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$. Het wordt nog mooier als $f(x)$ een even functie is:

½ wat worden de a_n dan ? Bepaal hiermee nu de Fourier reeks voor de functie: (1)

$f(x) = |x|, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Schets de functie en herhaal hem enkele keren.

Als het goed is, krijg je eruit: $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2nx$. Geldt dat voor alle n ? ½

7.12.28

wc

6. We verkrijgen een Fourier integraal dmv. een Fourier transformatie. Leg in maximaal 5 regels (leesbaar) uit wat het verschil is tussen een Fourier reeks en een Fourier integraal.

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha \text{ met } g(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx$$

3

Als $f(x)$ een oneven (even) functie is dan is $g(\alpha)$ ook oneven (even), hetgeen leidt tot de Fourier sinus (cosinus) transformaties. Deze zijn eenvoudig af te leiden (hoeft niet nu). Bereken nu *a)* de Fourier cosinus integraal en *b)* de sinus integraal van:

$f(x)=1, \quad 2<x<4$

$f(x)=0, \quad 0<x<2, x>4$

Als het goed is krijg je (ongeveer) de volgende antwoorden:

(a) $f_c(x)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\overbrace{\frac{\cos 3\alpha \sin\alpha}{\alpha}}^{\text{even}}\cos\alpha x\,d\alpha$ $\quad \frac{\cos\alpha}{\alpha}\cdot\frac{e}{o}=o \quad \sin=o \rightarrow o.o=\underline{\underline{e}}$

(b) $f_s(x)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\underbrace{\frac{\sin 3\alpha \sin\alpha}{\alpha}}_{\text{odd}}\sin\alpha x\,d\alpha$ $\quad \frac{\sin 3\alpha}{\alpha}\cdot\frac{o}{o}=e \quad \sin=o \rightarrow e\,o=\underline{\underline{o}}$

cosinus: $f_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} g_c(x)\cos\alpha x\,d\alpha$

$g_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx$

sinus: $f_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} g_s(x)\sin\alpha x\,d\alpha$

$g_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f_s(x)\sin\alpha x\,dx$

① $z = 2e^{-\frac{1}{2}it} = 2\cos(-\tfrac{1}{2}t) + 2i\sin(-\tfrac{1}{2}t)$

$\boxed{7.2.8}$ $A = 2 \qquad T = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi \rightarrow f = 1/4\pi$

$\frac{dz}{dt} = -ie^{-\frac{1}{2}it} = -\sin(-\tfrac{1}{2}t) - i\cos(-\tfrac{1}{2}t)$

$A_{vel} = 1$

②. $f(x)$: average?

$\boxed{7.4.12}$ $\frac{7}{8}\int_0^{8/7} \cos^2 \frac{7\pi x}{2}\, dx$ over $(0, 8/7)$

Periode $\frac{2\pi}{7\pi/2} = \frac{4}{7}$ dus $f(x)_{ave}$ is gemiddelde van $\cos^2 nx = \frac{1}{2}$ over $\frac{8}{7} = 2$ hele periodes

Ook: Stel: $x = \frac{4}{7\pi}t$ $\qquad x = 0 \rightarrow t = 0$

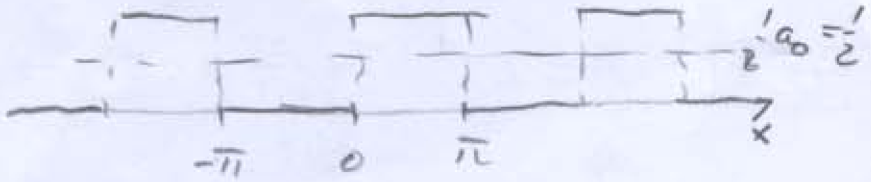
$x = 8/7 \rightarrow t = \frac{8}{7}\cdot\frac{7}{4}\pi = 2\pi$.

$t = \frac{7\pi}{4}x \rightarrow dx = \frac{4}{7\pi}dt$

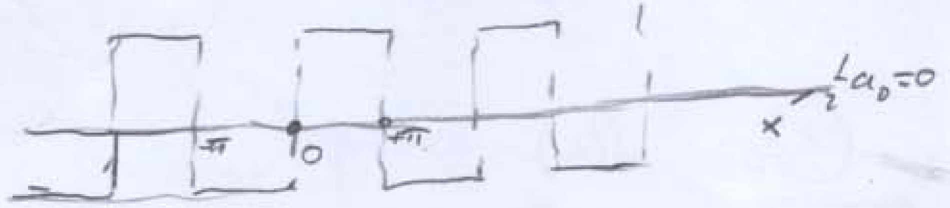
dus: $\frac{4.7}{7\pi.8}\int_0^{2\pi} \cos^2 \frac{7\pi.4}{7\pi.2}t\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2 2t\, dt = \frac{1}{2}$.

(3) Examples 1+2, blz 353/354.

$f(x) = 0, \quad -\pi < x < 0$
$\quad\;\; = 1, \quad 0 < x < \pi$



$g(x) = -1, \quad -\pi < x < 0$
$\quad\;\; = 1, \quad 0 < x < \pi$



Realiseer:

$g(x) = 2f(x) - 1$

Dan $\quad f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right)$

$g(x) = 2f(x) - 1 \;=\cancel{1} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right) \cancel{-1}$

$\quad = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right)$

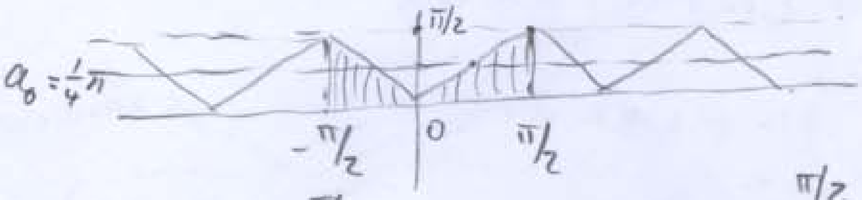
Het gemiddelde $\frac{1}{2}a_0$ is inderdaad nul, zoals uit de schets blijkt.

(4) Zie uitwerking van example op blz. 359 van Boas

(5)

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{+\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$ home $\boxed{7.9.10}$

even functie: $a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$



$f(x) = |x|$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$\ell = \frac{\pi}{2}$, even

$$a_n = \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} x\cos 2nx\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x.\cos 2nx\,dx.$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\left[\frac{x\sin 2nx}{2n}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2nx}{2n}\,dx\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[0 - 0 - \left.\frac{\cos 2nx}{4n^2}\right]_0^{\pi/2}\right] = \frac{4}{\pi}\left(\frac{(-1)^n - 1}{4n^2}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{voor even } n\ (n \neq 0) \\ -\frac{2}{\pi n^2} & \text{voor oneven } n \end{cases}$$

$\boxed{\frac{1}{2}a_0 = \frac{\pi}{4} \text{ (grafisch, zie schets)}}$

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\,dx = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{2^2} = \frac{\pi}{4}$$

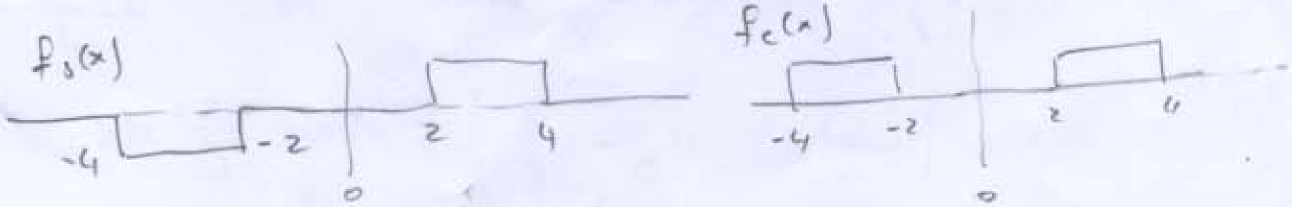
$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos 2x - \frac{2}{4\pi}\cos 4x -$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{\substack{1\\ n=odd}}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2nx$$

dus alleen voor n = oneven.

6 $\boxed{7.12.28}$ wc.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 2 < x < 4 \\ 0, & 0 < x < 2 \end{cases}$$



a) $g_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_c(x) \cos \alpha x \, dx$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_2^4 1 \cos \alpha x \, dx$ $\quad \to 2 \sin\alpha \cos 3\alpha$

$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha} \left[\sin \alpha x\right]_0^4 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\alpha} \left(\sin 4\alpha - \sin 2\alpha\right)$

$f_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g_c(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\alpha} (\sin 4\alpha - \sin 2\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha$

$= \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha}{\alpha} \cdot \cos \alpha x \, d\alpha.$

b). $g_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_s(x) \sin \alpha x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_2^4 1 \sin \alpha x \, dx$

$= -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{\alpha} \left[\cos 4\alpha - \cos 2\alpha\right]$ $\quad \to 2 \sin 3\alpha \cdot \sin \alpha$

$f_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g_s(x) \sin \alpha x \, d\alpha$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha}{\alpha} \cdot \sin \alpha x \, d\alpha$

$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\alpha}\right) \sin \alpha x \, d\alpha.$