

DIVA: Mid-term test 1b - 2014

1. Gegeven is een complexe functie $z = f(t)$. Laat zien dat een deeltje dat als coördinaten heeft a) $x = \operatorname{Re} z$ en b) $y = \operatorname{Im} z$ een harmonische beweging ondergaat. Bepaal de amplitude, periode en frequency, en de amplitude van de snelheid als $z = -4e^{i(2t+3\pi)}$

(7.2.10)

$$x = -4 \cos(2t + 3\pi) \quad y = -4 \sin(2t + 3\pi) \quad \text{dus} \quad A = 4, T = \pi, f = \frac{1}{\pi}$$

$$\frac{dx}{dt} = 8 \sin(2t + 3\pi) \quad \frac{dy}{dt} = -8 \cos(2t + 3\pi) \quad \text{dus} \quad A_{\text{vel}} = 8$$

2. Er geldt dat $\int_a^b \sin^2 kx \, dx = \int_a^b \cos^2 kx \, dx = \frac{1}{2}(b-a)$ mits $k(b-a)$ een veelvoud van π is, of indien zowel kb als ka een veelvoud van $\frac{1}{2}\pi$ zijn. Evalueer nu de volgende integralen zonder ze uit te werken:

$$\text{a) } \int_0^{4\pi/3} \sin^2\left(\frac{3x}{2}\right) dx \quad \text{b) } \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

(7.4.14)

$$\text{a) } \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\pi - 0\right) = \frac{12}{6}\pi = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2} \frac{4}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{b) } \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{2}{2}\pi = \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2} \frac{4}{2}\pi = \pi$$

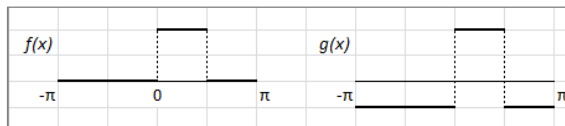
3. Als je weet dat de Fourier reeks van $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \frac{1}{2}\pi \\ 0, & \frac{1}{2}\pi < x < \pi \end{cases}$ gelijk is aan:

$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots \right) + \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{2 \sin 2x}{2} + \frac{3 \sin 3x}{3} + \frac{3 \sin 5x}{5} - \dots \right)$$

$$\text{wat is dan de Fourier reeks voor } g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \frac{1}{2}\pi \\ -\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\pi < x < \pi \end{cases} \quad ?$$

Schets beide functies over enkele perioden, en leid de eerste term van $g(x)$ (a_0) grafisch af uit de schets van deze functie.

$$g(x) = 1.5f(x) - \frac{1}{2}, a_0 = -\frac{1}{8}:$$



$$g(x) = 1.5f(x) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} - \frac{3}{2\pi} \left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots \right) + \frac{3}{2\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{2 \sin 2x}{2} + \frac{3 \sin 3x}{3} + \frac{3 \sin 5x}{5} - \dots \right)$$

4. De complexe vorm van de Fourier reeks is:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx} \quad \text{met} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Bepaal de c_n van de functie $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \sin x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

Bepaal c_0, c_1, c_{-1} apart, en bepaal hiermee de eerste 2 termen van $f(x)$

Bonuspunt: Kun je de (even) c_n toepassen om de overige termen van $f(x)$ te bepalen ?

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} + \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{4i} - \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{-\infty \\ \text{even } n \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n^2 - 1} \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{\infty \\ \text{even } n}} \frac{\cos nx}{n^2 - 1} \end{aligned}$$

5. We kunnen een Fourier reeks ook ontwikkelen over een willekeurige periode

$\lambda = 2l$. We krijgen dan bv. $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx$. Wat zijn de b_n ?

Schets de volgende functie en herhaal hem enkele keren.

$$f(x) = x + \frac{1}{2}\pi, \quad -\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$$

Bepaal of de functie even of oneven is (of de som van een even + oneven functie), en bepaal vervolgens de Fourier reeks.

6. We verkrijgen een Fourier transformatie (FT) als volgt:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \quad \text{met} \quad g(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

Op het werkcollege heb je opgave 7.12.11 gemaakt:

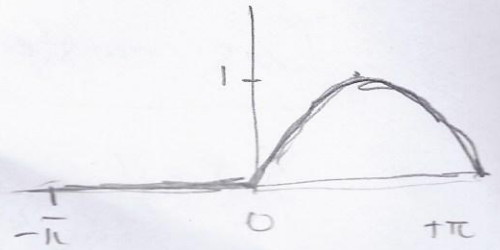
$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases}$$

Met $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ (of nu met $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$) is er goed uit te komen.

Bepaal de FT van $f(x) = \begin{cases} \sin x, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases}$

(4)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \sin x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

BOAS
7.7.11

Eerst: $C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{1}{2\pi} (-\cos x) \Big|_0^{\pi}$

$$= \frac{1}{2\pi} -(-1) + (1) = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$$

Dan: $C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cdot e^{-inx} \, dx = \frac{1}{4\pi i} \int_0^{\pi} (e^{ix} - e^{-ix}) \cdot e^{-inx} \, dx$

Dus: $C_1 = \frac{1}{4\pi i} \int_0^{\pi} (e^{ix} - e^{-ix}) e^{-ix} \, dx = \frac{1}{4\pi i} \int_0^{\pi} (1 - e^{-2ix}) \, dx$

$$= \frac{1}{4\pi i} \left[x - \frac{e^{-2ix}}{-2i} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{4\pi i} \left[\pi - 0 + \frac{e^{-2\pi i}}{2i} - \frac{1}{2i} \right]$$

$$= \frac{1}{4i} = \frac{-i}{4}$$

en: $C_{-1} = \frac{1}{4\pi i} \int_0^{\pi} (e^{ix} - e^{-ix}) e^{+ix} \, dx = \frac{1}{4\pi i} \int_0^{\pi} (e^{2ix} - 1) \, dx$

$$= \frac{1}{4\pi i} \left[\frac{e^{2ix}}{2i} - x \right]_0^{\pi} = \frac{1}{4\pi i} \left[\frac{e^{2\pi i}}{2i} - \frac{e^0}{2i} - \pi + 0 \right]$$

$$= \frac{-1}{4i} = \frac{i}{4}$$

Dus eerste termen: (c_0, c_1, c_{-1})

$$f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{i}{4} e^{ix} + \frac{i}{4} e^{-ix} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x$$

nu de termen met $|n| > 1$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin x \cdot e^{-inx} dx = \frac{1}{4\pi i} \int_0^\pi (e^{ix} - e^{-ix}) e^{-inx} dx$$

$$= \frac{1}{4\pi i} \int_0^\pi (e^{-i(n-1)x} - e^{-i(n+1)x}) dx$$

$$= \frac{1}{4\pi i} \left[\frac{e^{-i(n-1)x}}{-i(n-1)} - \frac{e^{-i(n+1)x}}{-i(n+1)} \right]_0^\pi$$

($-i^2$ in noemer) = +1

$$= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{(n+1)e^{-i(n-1)\pi}}{n^2-1} - \frac{(n-1)e^{-i(n+1)\pi}}{n^2-1} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{(n+1)e^{-i(n-1)\pi}}{n^2-1} - \frac{(n-1)e^{-i(n+1)\pi}}{n^2-1} \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{(n+1)(-1)^{n-1}}{n^2-1} - \frac{(n-1)(-1)^{n+1}}{n^2-1} - \frac{2}{n^2+1} \right\}$$

7
1

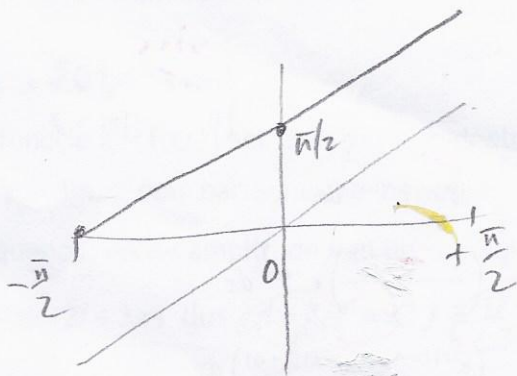
$$n = \text{even: } c_n = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{-(n+1) + (n-1)}{n^2-1} - \frac{2}{n^2+1} \right\} = \frac{-1}{\pi(n^2-1)}$$

$$n = \text{odd: } c_n = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{(n+1) - (n-1)}{n^2-1} - \frac{2}{n^2+1} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos nx + i \sin nx}{\pi(n^2-1)} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x + \sum_{\substack{n=2 \\ (\text{even})}}^{+\infty} \frac{\cos nx}{\pi(n^2-1)}$$

5

$$f(x) = x + \frac{\pi}{2}$$



variatie op
7.9.8

$$f(x) = x \text{ (oneven)} \quad f(\bar{x}) = \frac{\pi}{2} \rightarrow a_0 = \frac{\pi}{2} \text{ (even)}$$

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^{\pi/2} x \sin(2nx) dx \quad \left[\sin \frac{n\pi}{2} x = \sin 2nx \right] \\ &= \frac{4}{\pi} \frac{1}{2n} \left\{ -x \cos 2nx \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos 2nx dx \right\} \\ &= \frac{2}{\pi n} \left[-\frac{\pi}{2} \cos n\pi + 0 + \frac{\sin 2nx}{2n} \Big|_0^{\pi/2} \right] \\ &= \frac{2}{\pi n} \left[-\frac{\pi}{2} (-1)^n + 0 \right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

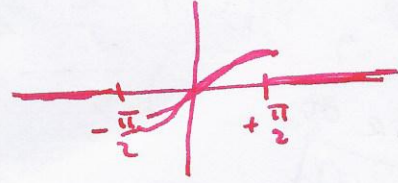
$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin 2nx$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2x}{1} - \frac{\sin 4x}{2} + \frac{\sin 6x}{3} - \dots$$

$$= \frac{1}{2}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin 2nx$$

7.12.11 Idem voor:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



$$g(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^{-i\alpha x} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) e^{-i\alpha x} dx$$

$$= \frac{1}{4\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^{ix(1-\alpha)} - e^{-ix(1+\alpha)}) dx$$

$$= \frac{1}{4\pi i} \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\alpha)} - e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}}{i(1-\alpha)} - \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1+\alpha)} - e^{i\frac{\pi}{2}(1+\alpha)}}{-i(1+\alpha)} \right) \quad (\text{Gebruik } e^{i\frac{\pi}{2}} = -e^{-i\frac{\pi}{2}} = i.)$$

$$= \frac{1}{4\pi i} \left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} + e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}}{i(1-\alpha)} - \frac{-e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} - e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}}{-i(1+\alpha)} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} + e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}}{2(1-\alpha)} + \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} + e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}}{2(1+\alpha)} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\alpha)}{1-\alpha} + \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\alpha)}{1+\alpha} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\alpha) + \alpha \cos(\frac{\pi}{2}\alpha)}{1-\alpha^2} + \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\alpha) - \alpha \cos(\frac{\pi}{2}\alpha)}{1-\alpha^2} \right)$$

$$= \frac{\alpha \cos(\frac{\pi}{2}\alpha)}{i\pi(1-\alpha^2)}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha \cos(\frac{\pi}{2}\alpha)}{i\pi(1-\alpha^2)} e^{i\alpha x} d\alpha$$