

DIVA: Mid-term test 1a (March 2011)

Schrijf je naam en schrijf netjes. Er zijn 10 opgaven, allemaal 1 punt waard

1. Vind de limiet van de rij $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n+1}}{n}$ (1.2.3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n+1}}{n} \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n^{1/2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/2}} = 0$$

2. Gebruik de divergentie test ('preliminary test' in Boas) om te beslissen of de volgende reeks divergent is of verder getest moet worden: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n + 3^n}$ (1.5.9)

$\begin{aligned} \text{Let } \alpha_n &= \frac{3^n}{2^n + 3^n} \\ &= \frac{1}{\frac{2^n}{3^n} + 1} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \\ &= \frac{1}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n} \\ &= \frac{1}{1 + 0} \\ &= 1 \neq 0 \end{aligned}$
--	--

Omdat de limiet niet gelijk is aan nul, divergeert de reeks. Niet verder testen dus.

3. Gebruik de ratio test om te bepalen of de volgende reeks convergeert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} \quad (1.6.29)$$

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{(2n+2)(2n+1)(2n)!}}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{(2n+2)(2n+1)} \cdot \sqrt{(2n)!}}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{\sqrt{(2n)!}} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{4n^2}}{(n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n} = 2 \end{aligned}$$

De reeks divergeert dus.

4. Vind het convergentie interval voor de machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{x^n}$ (1.10.22)

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{x^{n+1}} \cdot \frac{x^n}{(-1)^n n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{x} \right| = \infty \text{ dus voor geen enkele } x$$

5. Als je weet dat de Taylor reeks voor e^x rond $x = 0$ is: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

en dat voor de eerste twee termen $\tan x$ geldt $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \dots$

wat zijn dan de termen (t/m x^4) van de Taylor reeks rond $x = 0$ voor $e^{\tan x}$?

Voor de oplossing zie Example 2 op blz. 29-30 van Boas

6. a. Schrijf in de vorm $a+bi$: $\frac{z}{z}$ als $z = 2 - 3i$ (2.5.24)

$$\frac{2-3i}{2+3i} = \frac{(2-3i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{4-12i+9i^2}{4-9i^2} = \frac{-5-12i}{13} = -\frac{5}{13} - \frac{12}{13}i$$

b. Bepaal de absolute waarde van $\frac{3i}{i-\sqrt{3}}$ (2.5.30)

$$\left| \frac{3i}{i-\sqrt{3}} \right| = \left| \frac{3}{\sqrt{1+3}} \right| = \frac{3}{2}$$

7. Los op en schets in het complexe vlak de volgende vergelijkingen

(a) $|x+iy| = y-ix$ (2.5.50) (b) $\text{Im } z < 3$ (2.5.61)

(a) $\sqrt{x^2+y^2} = y-ix \Rightarrow x=0, y \geq 0$ (b) Halfvlak, $y < 3$

8. Test de complexe reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+2i)^n}{n!}$ voor convergentie (2.6.12)

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(3+2i)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(3+2i)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3+2i}{n+1} \right| = 0 \text{ dus convergeert altijd.}$$

9. Vind de convergentie cirkel voor de complexe machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 z^n}{(2n)!}$ (2.7.12)

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{((n+1)!)^2 z^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2 z^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2 z}{(2n+2)(2n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2 z}{4n^2} \right| = \left| \frac{z}{4} \right| < 1 \Rightarrow |z| < 4$$

10. Vind alle complexe wortels voor $z = \sqrt[3]{2i-2}$ (2.10.22)

Schrijf als $\sqrt[3]{re^{i\vartheta}}$:

Absolute waarde van $z = 2i-2$ is $\sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ dus $r^{1/3} = (\sqrt{8})^{1/3} \Rightarrow r = \sqrt{2}$

$\sqrt[3]{e^{i\vartheta}} = e^{1/3 i(\frac{3}{4}\pi + 2n\pi)} = e^{i(\frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3}n\pi)}$ dus oplossingen $\vartheta = \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi, \frac{1}{4}\pi + \frac{4}{3}\pi$

ofwel $1+i, \cos 165^\circ + i \sin 165^\circ, \cos 285^\circ + i \sin 285^\circ$ (of sin, cos in radialen)