DIVA: End-term 2011

Schrijf je naam en schrijf netjes. De punten per opgave staan vetgedrukt

(1) 1. Gegeven is de 1e orde differentiaalvergelijking

$$2\frac{dy}{dx} = 3(y-2)^{1/3}$$

Los deze vergelijking op, met als randvoorwaarde $y(1) = 3$

Given differential equation is

$$2y' = 3(y-2)^{1/3}$$

Or, $$2\frac{dy}{dx} = 3(y-2)^{1/3}$$

Or, $$\frac{dy}{(y-2)^{1/3}} = \frac{3}{2}dx$$

Integrating both sides we have,

$$\int \frac{1}{(y-2)^{1/3}}dy = \frac{3}{2}\int dx$$

Or, $\int (y-2)^{-1/3}dy = \frac{3}{2}x + C$, C is an arbitrary constant.

Or, $$\frac{(y-2)^{2/3}}{2/3} = \frac{3}{2}x + C$$

Or, $(y-2)^{2/3} = x + A$, where $A = \frac{2C}{3}$

Or, $$y - 2 = (x+A)^{3/2}$$

Or, $$y = 2 + (x+A)^{3/2} \quad \text{--- (1)}$$

Which is the required solution containing one arbitrary constant.

Now y = 3 when x = 1
From (1)

$$(3-2)^{2/3} = 1 + A$$

Or, $$A = 0$$

Therefore, the particular solution is $y = 2 + x^{\frac{3}{2}}$.

(2) 4. *Laplace:* $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ met oplossingen $T = XY = \begin{Bmatrix} e^{ky} \\ e^{-ky} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix}$

Beschouw nu een half-oneindige plaat met breedte 30 cm (x). Alle zijden zijn 0° behalve langs de x-as waar de temperatuur gehouden wordt op:

$$T = \begin{cases} x, & 0 < x < 15 \\ 30 - x, & 15 < x < 30 \end{cases}$$

Vind de *steady-state* temperatuurverdeling van de plaat.

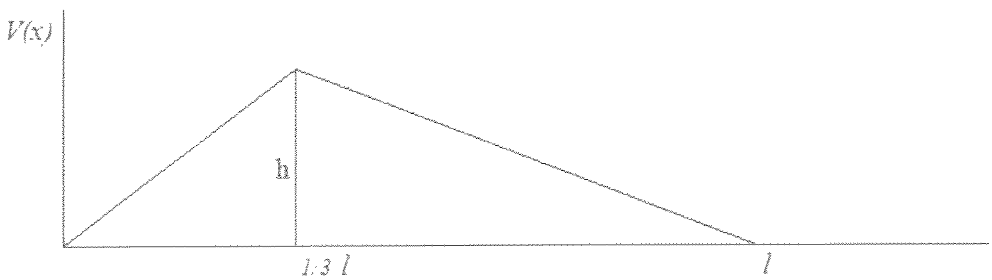
(2) 5. *Diffusie vergelijking:* $\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t}$ met oplossingen $u = FT = \begin{Bmatrix} e^{-k^2\alpha^2 t} \sin kx \\ e^{-k^2\alpha^2 t} \cos kx \end{Bmatrix}$

We hebben een plaat met dikte l cm met een *initial steady state* T-verdeling voor $t<0$ met $T_1 = 50°$ links ($x = 0$) en $T_2 = 150°$ ($x = l$). Vanaf $t = 0$ houden we de temperatuur links op $T_1 = 150°$ en rechts op $T_2 = 50°$. Vind de temperatuur-verdeling $u(x,t)$ in de plaat op tijdstip t. *Hint:* het antwoord voor hetzelfde probleem in een huiswerkopgave voor T van (0,100) ($t<0$) naar (100,0) (vanaf $t=0$) was:

$$u = 100 - \frac{100x}{l} - \frac{400}{\pi} \sum_{\substack{2 \\ \text{even } n}}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

(2) 6. *Snelheidsvergelijking:* $\nabla^2 y = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, met oplossing $y = XT = \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{Bmatrix}$

Neem een snaar met met lengte l en initiëel recht ($y=0$). Op tijdstip $t = 0$ krijgt de snaar een beginsnelheid $V(x) = (\frac{\partial y}{\partial t})_{t=0}$, bv. door 'm aan te slaan. De snaar krijgt de volgende verplaatsing:



Vind de verplaatsing als functie van x en t. Het gaat vooral om het opzetten van de juiste vergelijkingen, gebruikmakend van de gegeven rand- en begin-voorwaarden. Het vinden van de juiste oplossing levert overigens wel wat op.