DIVA: End-term test 2013

Schrijf je naam en schrijf netjes. De punten per opgave staan vetgedrukt

(1) 1. Gegeven is de niet-lineaire, wel separeerbare, 1e orde differentiaalvergelijking

$$2y^3 z\frac{dy}{dz} - 2z + 6 = 0 \text{ met } z > 0$$

Los deze vergelijking op, met als randvoorwaarde $y(1) = 2$

(1) 2. We hebben de volgende inhomogene 1e orde LDV:

$$2x\frac{dy}{dx} + y - 2x^{5/2} = 0$$

Los eerst de homogene vergelijking op. Stel vervolgens de integratie constante C als een functie van x: C(x). Los daarmee de inhomogene vergelijking op.

3. De algemene oplossing van een homogene 2e orde LDV met constante coëfficienten $y'' + py' + qy - 2y = 0$ (p,q constant) is $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

De inhomogene vergelijking $y'' + py' + qy - 2y = r(x)$ heeft dan als oplossing $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ met $y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$

Als we nu eisen dat (1) $u'y_1 + v'y_2 = 0$ dan moet gelden (2) $u'y_1' + v'y_2' = r(x)$

(2) a. Uit de gekoppelde vergelijkingen (1) en (2) kun je uitdrukkingen vinden voor $u'(x)$ en $v'(x)$ en daarmee voor $u(x)$ en $v(x)$. Het blijkt dan dat:

$$u(x) = \int \frac{-y_2 r(x)}{W(x)} \text{ en } v(x) = \int \frac{y_1 r(x)}{W(x)} \text{ met } W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

Hiermee kunnen we dan in principe iedere 2^e orde LDV oplossen, via het zgn. *5 stappen plan.* Leg dat 5 stappen plan eens uit ?

b. $y'' + y' - 2y = 2e^x$

c. $y'' + 6y' + 9y = 12e^{-x}$

(2) 4. *Laplace:* $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ met oplossingen $T = XY = \begin{Bmatrix} e^{ky} \\ e^{-ky} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix}$

Beschouw nu een half-oneindige plaat met breedte 30 cm (x). Alle zijden zijn 0° behalve langs de x-as waar de temperatuur gehouden wordt op:

$$T = \begin{cases} x, & 0 < x < 15 \\ 30 - x, & 15 < x < 30 \end{cases}$$

Vind de *steady-state* temperatuurverdeling van de plaat.

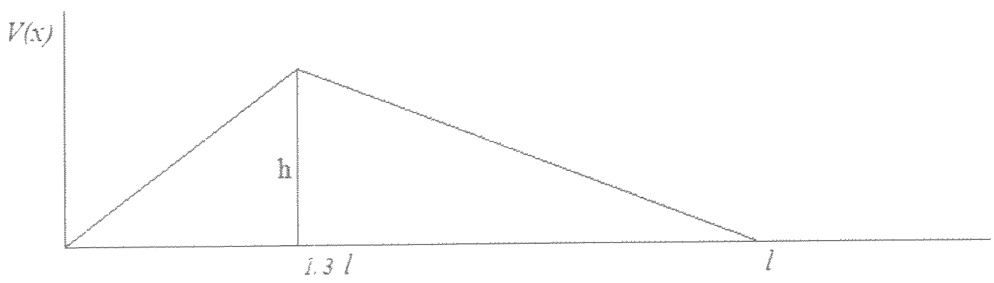
(2) 5. *Diffusie vergelijking:* $\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t}$ met oplossingen $u = FT = \begin{Bmatrix} e^{-k^2\alpha^2 t} \sin kx \\ e^{-k^2\alpha^2 t} \cos kx \end{Bmatrix}$

We hebben een plaat met dikte l cm met een *initial steady state* T-verdeling voor $t<0$ met $T_1 = 50^\circ$ links ($x = 0$) en $T_2 = 150^\circ$ ($x = l$). Vanaf $t = 0$ houden we de temperatuur links op $T_1 = 150^\circ$ en rechts op $T_2 = 50^\circ$. Vind de temperatuur-verdeling $u(x,t)$ in de plaat op tijdstip t. *Hint:* het antwoord voor hetzelfde probleem in een huiswerkopgave voor T van (0,100) ($t<0$) naar (100,0) (vanaf $t=0$) was:

$$u = 100 - \frac{100x}{l} - \frac{400}{\pi} \sum_{\substack{2 \\ \text{even } n}}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

(2) 6. *Snelheidsvergelijking:* $\nabla^2 y = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, met oplossing $y = XT = \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{Bmatrix}$

Neem een snaar met met lengte l en initiëel recht ($y=0$). Op tijdstip $t = 0$ krijgt de snaar een beginsnelheid $V(x) = (\frac{\partial y}{\partial t})_{t=0}$, bv. door 'm aan te slaan. De snaar krijgt de volgende verplaatsing:



Vind de verplaatsing als functie van x en t. Het gaat vooral om het opzetten van de juiste vergelijkingen, gebruikmakend van de gegeven rand- en begin-voorwaarden. Het vinden van de juiste oplossing levert overigens wel wat op.