b) Los de differentiaalvergelijking op als $H \neq 0$ en laat zien dat het temperatuurprofiel wordt gegeven door

$$T(z) = -\frac{H}{2k}z^2 + \left(\frac{H}{2k}L - \frac{550}{L}\right) z + 550.$$

c) Bereken de temperatuur op $z = L/2$ in beide gevallen. In welk geval is de temperatuur op $z = L/2$ hoger?

6. (3) De algemene oplossingen van de 1D diffusievergelijking

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial T}{\partial t}$$

zijn gegeven door

$$T(x,t) = T_f(x) + T'(x,t) = T_f(x) + \left\{ \begin{array}{c} e^{-k^2\alpha^2 t}\sin kx \\ e^{-k^2\alpha^2 t}\cos kx \end{array} \right\}$$

waarbij $T_f(x)$ het (lineaire) temperatuurprofiel is als $t \to \infty$.
We beschouwen een draad van lengte l met geïsoleerde zijkanten die initiëel 0°C is. Vanaf $t = 0$ houden we de twee uiteinden van de draad op 100°C.
a) Wat is in dit geval $T_f(x)$?
b) Welke randvoorwaarden gelden voor T' als $t > 0$?
c) Laat zien dat de oplossing van dit probleem gegeven wordt door

minnetje

$$T(x,t) = 100 - \frac{400}{\pi}\sum_{\text{odd}\,n}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/l^2} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

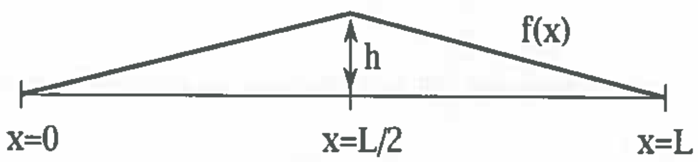
7. (4) De golfvergelijking beschrijft de uitwijking y van een snaar als functie van x en t. In het geval van een snaar wordt de golfvergelijking gegeven door

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

met oplossingen

$$y(x,t) = X(x)T(t) = \left\{ \begin{array}{c} \sin kx \\ \cos kx \end{array} \right\}\left\{ \begin{array}{c} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{array} \right\}$$

met $\omega = kv$.
Neem een snaar met beginsnelheid nul (plucked string) en initiële verplaatsing als volgt:



a) Bepaal de functie $f(x)$ met behulp van de figuur.

b) Geef de randvoorwaarden op $x = 0$ en $x = L$. Geef ook de beginvoorwaarden die gelden voor $\frac{\partial y}{\partial t}$ en y op $t = 0$.

c) Vind de verplaatsing als functie van x en t.

BONUS (2) De laplacegetransformeerde, $L(f)$, van een functie $f(t)$ wordt gegeven door

$$L(f) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

Reken hiermee de laplacegetransformeerde van $f(t) = \delta(t - t_0)$ uit als $t_0 > 0$.
Wat is de laplacegetransformeerde als $t_0 \leq 0$?
Bepaal ook de laplacegetransformeerde van $g(t) = f'(t) = \delta'(t - t_0)$ als $t_0 > 0$ en als $t_0 < 0$.

DIVA: End-term test. 28 januari 2016. Docent: C. Thieulot.
Vergeet niet je naam op te schrijven en schrijf netjes. Licht je afleidingen toe. Er zijn totaal 20 punten te behalen en 2 bonuspunten, bij elke vraag staat aangegeven hoeveel punten deze waard is.

1. (2) Gegeven is de 1e orde, niet-lineaire differentiaalvergelijking

$$(y-8)dy + (64x - xy^2)dx = 0.$$

Los deze vergelijking op door middel van scheiden van variabelen, met als randvoorwaarde $y(0) = 0$.

2. (3) Gegeven is de eerste orde, lineaire differentiaalvergelijking

$$2x\,dy + (y - 2x^{5/2})dx = 0.$$

a) Schrijf de vergelijking in de vorm $y' + P(x)y = Q(x)$.

b) Los de homogene vergelijking $y' + P(x)y = 0$ op.

c) Stel de integratieconstante C als een functie van x: $C \to C(x)$. Los daarmee de inhomogene vergelijking van vraag (a) op.

d) Gebruik de randvoorwaarde $y(3) = 0$ om de laatste integratieconstante te berekenen.

3. (3) We beschouwen de vergelijking

$$y'' + 2y' + y = x^2 \tag{1}$$

(a) Geef de karakteristieke vergelijking (Auxiliary equation) van de homogene vergelijking:

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

b) Laat zien dat $y_c = (Ax + B)e^{-x}$ een oplossing is van de homogene vergelijking

c) Gegeven is dat $y_p = ax^2 + bx + c$ een oplossing is van vergelijking (1). Voor welke waarden van a, b en c is dit het geval?

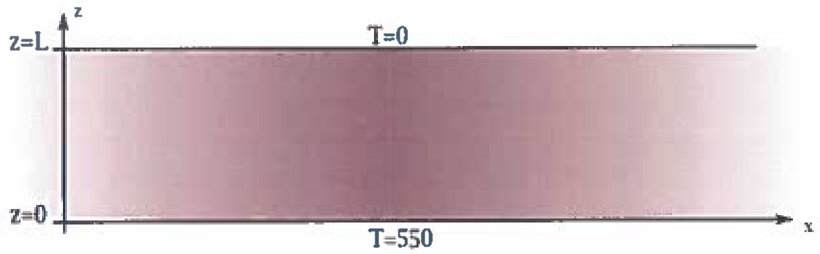
d) Wat is de algemene oplossing van vergelijking (1)?

4. (2) Gegeven is dat de laplacegetransformeerde van $y(t) = \sinh(at)$ gelijk is aan $L(y) = Y(p) = \frac{a}{p^2-a^2}$. Verder is gegeven dat $L(y'') = p^2Y - py_0 - y_0'$. Gebruik deze gegevens om de volgende differentiaalvergelijking op de lossen:

$$y'' + y = 5\sinh(2t)$$

met $y_0 = 0$ en $y_0' = 2$.

5. (3) Beschouw de aardkorst en neem aan dat deze oneinding uitgebreid is in de x richting.



Beschouw de volgende warmtevergelijking voor dit model

$$k\frac{d^2T}{dz^2} + H = 0$$

waar $k > 0$ de 'heat conductivity coefficient' is en $H \geq 0$ de 'heat production coefficient' is.

De korst heeft een dikte L en de randvoorwaarden zijn als volgt: $T(z = 0) = 550°C$ and $T(z = L) = 0°C$

a) Neem aan dat $H = 0$. Los de differentiaalvergelijking op en laat zien dat het temperatuurprofiel wordt gegeven door

$$T(z) = -\frac{550}{L}(z - L).$$