

6. (4) De complexe Fourierreeks voor een functie  $f(x)$  met periode  $2l$  wordt gegeven door

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/l} \quad \text{met} \quad c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi x/l} dx.$$

De functie  $f(x)$  is periodiek met periode 2 en is gedefinieerd als:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

a) Schets  $f(x)$  op het interval  $[-3, 3]$ .

b) Bepaal met behulp van de bovengenoemde vergelijkingen de complexe Fourierreeks van de functie  $f(x)$ .

c) Schrijf deze complexe reeks om naar een sinus-cosinus reeks (Dus niet opnieuw uitrekenen!).

7. (2) Wat zijn de verschillen tussen een Fourierreeks en een Fourierintegraal?

8. (3) De Fourierintegraal van een functie  $f(x)$  is als volgt gedefinieerd:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \quad \text{met} \quad g(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx.$$

Bepaal hiermee de Fourierintegraal van de functie  $f(x)$  (Hint: Gebruik complexe e-machten om  $\sin(\pi x)$  om te schrijven). Zorg ervoor dat er geen complexe e-machten meer in je eindantwoord staan!

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

**BONUS (2)** Gegeven is de functie  $f(x) = x$  op het interval  $[-1, 1]$  met periode 2. De complexe Fourierreeks van deze functie is

$$f(x) = -\frac{i}{\pi} \left( e^{i\pi x} - e^{-i\pi x} - \frac{1}{2} e^{2i\pi x} + \frac{1}{2} e^{-2i\pi x} + \frac{1}{3} e^{3i\pi x} - \frac{1}{3} e^{-3i\pi x} - \frac{1}{4} e^{4i\pi x} + \frac{1}{4} e^{-4i\pi x} + \dots \right).$$

Gebruik deze Fourierreeks en Parseval's theorem om de uitkomst te vinden van de som

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

DIVA: Mid-term test 1b. 14 december 2015. Docent: C. Thieulot.

Vergeet niet je naam op te schrijven en schrijf netjes. Licht je afleidingen toe. Er zijn totaal 20 punten te behalen en 2 bonuspunten, bij elke vraag staat aangegeven hoeveel punten deze waard is.

1. (2) De positie  $s$  van een deeltje varieert met de tijd. De snelheid  $v$  van het deeltje wordt gegeven door  $v = ds/dt$ . Laat zien dat zowel  $s$  als  $v$  periodiek zijn (i.e. beschreven worden door een sinus of cosinus) en bepaal de amplitude, periode en frequentie van  $s$  en  $v$  als:

$$\text{a) } s = \operatorname{Re}(\pi e^{15i\pi t}). \quad \text{b) } s = \operatorname{Im}(5e^{i(2t+2\pi)}).$$

2. (2) Gegeven is de functie  $f(x) = 3e^x$  op het interval  $-\pi < x < \pi$ . De functie is periodiek met periode  $2\pi$ . Vind de gemiddelde waarde van  $f(x)$  over het interval  $[-\pi, \pi]$ . Wat is de waarde van de coefficient  $a_0$  van zijn Fourierreeks?

3. (3) Gegeven is dat de Fourierreeks van de functie

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

gelijk is aan

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right).$$

De functie  $g(x)$  is als volgt gedefinieerd:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ -x + 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

a) Druk  $g(x)$  uit in  $f(x)$ .

b) Bepaal de Fourierreeks van  $g(x)$  met behulp van de Fourierreeks van  $f(x)$ .

4. (2) Bepaal of de volgende functies even, oneven of geen van beide zijn (Licht toe, alleen een antwoord levert geen punten op!):

$$f_1(x) = \sin^2 x \quad f_2(x) = x^{15} + x^{27} \quad f_3(x) = \ln x \quad f_4(x) = e^{\sin x} - e^{-\sin x}$$

5. (2) Gegeven zijn de formules voor de Fouriercoefficienten  $a_n$  en  $b_n$  van een functie  $f(x)$  met periode  $2l$ :

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad \text{en} \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

Hoe kunnen de formules voor  $a_n$  en  $b_n$  geschreven worden als  $f(x)$  een oneven functie is? Kies je antwoord uit:

A:  $a_n = 0$  en  $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$

B:  $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$  en  $b_n = 0.$

C:  $a_n = 0$  en  $b_n = \frac{2}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$

D:  $a_n = \frac{2}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$  en  $b_n = 0.$