Lineaire Algebra en Vector Analyse (GEO2-1201)

11 november 2010, 13.30-16.30

DEEL 1

Toon ook de tussenstappen.

1. Los (indien mogelijk) de volgende twee stelsels van vergelijken op:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} -3x & - & 7y & + & 9z & = & -6 \\ x & + & 3y & - & 5z & = & 4 \\ 2x & + & 7y & - & 13z & = & 11 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

2. Bepaal de vergelijking van het vlak door de punten $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, 2)$ en $C = (3, 2, 1)$.

3. Gegeven zijn de volgende twee lijnen:

$$\mathbf{r_1} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} + (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})t_1$$

$$\mathbf{r_2} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k} + (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})t_2$$

(a) Laat zien dat de lijnen elkaar snijden. Geef het snijpunt.
(b) Geef de cosinus of de sinus van de hoek tussen de twee lijnen.

4. Gegeven is de matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Bereken(!) de inverse van A.
(b) Beschrijf de transformatie van A in termen van rotatie en/of reflectie. Ga er daarbij vanuit dat een punt $\mathbf{r} = (x, y, z)$ verplaatst naar $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ via $\mathbf{r}' = A\mathbf{r}$.

5. Toon aan dat $(ABC)^T = C^T B^T A^T$ met behulp van indexnotatie.

DEEL 2

Toon ook de tussenstappen.

1. De matrix M is gegeven als

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

(a) Bereken de eigenwaarden van M en geef bijbehorende eigenvectoren.

(b) Geef een diagonaalmatrix van eigenwaarden, D, met bijbehorende matrix van eigenvectoren, C.
Wat is de relatie tussen M, C en D?

2. (a) Een punt is gegeven in het Cartesisch coördinatenstelsel (x, y, z) als $(1, -\sqrt{3}, -2)$. Geef de coördinaten van het punt in het cilindrisch coördinatenstelsel (r, θ, z) en het sferisch coördinatenstelsel (r, θ, ϕ). Geef ook een schets waarin de hoeken van het sferisch coördinatenstelsel aangegeven zijn.

(b) Bereken(!) de oppervlakte van een bol met straal a.

3. Bereken de dubbele integraal

$$\iint_A (4x - 2y)dxdy$$

waarbij A de driehoek is met hoekpunten $(0,0)$, $(2,0)$, en $(1,1)$.

4. (a) Bereken $\nabla\phi$ en $\nabla^2\phi$ voor $\phi = x^2 + \sin y - xz$.

(b) Bereken $\nabla \cdot \mathbf{V}$ en $\nabla \times \mathbf{V}$ voor $\mathbf{V} = (2xy - z^3)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + (3xz^2 + 1)\mathbf{k}$.
Is $\mathbf{V}$ conservatief? Verklaar.

5. Gegeven is het vectorveld $\mathbf{A} = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, en een rechthoek σ die in het x-y-vlak ligt en begrensd wordt door de zijden $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, en $y = b$.

(a) Bereken $\nabla \times \mathbf{A}$, en geef de normaal $\mathbf{n}$ op de rechthoek σ.
Bereken vervolgens

$$\iint_\sigma (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

(b) Bereken tevens

$$\oint_{\text{pad langs } \sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

Verklaar waarom het antwoord hetzelfde is (of niet) als bij (a).