Lineaire Algebra en Vector Analyse (GEO2-1201)

7 november 2012, 9.00-12.00
DEEL 1

Toon ook de tussenstappen.

1. Los (indien mogelijk) het volgende stelsel vergelijken op.
   Gebruik rijreductie en vereenvoudig zo ver mogelijk.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & - & 7x_4 & = & 0 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & - & 5x_3 & - & 6x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

2. Los het volgende stelsel vergelijkingen op m.b.v. de regel van Cramer.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & & & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

3. Gegeven is de lijn:

$$x - 1 = \frac{y-2}{2} = \frac{3-z}{2}$$

   (a) Geef een vergelijking van deze lijn in parametrische vorm: $\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{A}t$.
   (b) Bepaal de afstand vanuit de oorsprong tot deze lijn.
   (c) Geef de vergelijking van het vlak waarin deze lijn ligt, en ook het punt $P = (1, 0, 1)$.

4. Gegeven is de matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

   (a) Wanneer bestaat de inverse van A?
   (b) Bereken A^{-1} als A inverteerbaar is.
   (c) Voor welke waarden van a, b, c, d, e, f is A een orthogonale matrix? (Leid af.)

5. (a) $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ zijn vectoren. Laat zien dat de twee vectoren $\mathbf{B}|\mathbf{A}| + \mathbf{A}|\mathbf{B}|$ en $\mathbf{A}|\mathbf{B}| - \mathbf{B}|\mathbf{A}|$ orthogonaal zijn. Leg daarbij elke, zelfs kleine, stap uit.
   (b) A is een $(p \times q)$ matrix, B en C zijn $(q \times r)$ matrices.
   Als $AB = AC$, geldt dan dat $B = C$? Leg helder uit met behulp van indexnotatie.
   (c) A is een vierkante matrix. Is AA^T een symmetrische matrix?
   Toon aan m.b.v. indexnotatie.

Lineaire Algebra en Vector Analyse (GEO2-1201)

7 november 2012, 9.00-12.00

DEEL 2

Toon ook de tussenstappen.

1. De matrix M is gegeven als
$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
   (a) Bereken de eigenwaarden van M en geef bijbehorende eigenvectoren.
   (b) Geef een diagonaalmatrix van eigenwaarden, D, met bijbehorende matrix van eigenvectoren, C, en geef de relatie tussen M, C en D.
   Wat is de betekenis van D en C?

2. (a) Een punt is gegeven in het Cartesisch coördinatenstelsel $(x, y, z) = (-1, 1, \sqrt{2})$.
   Geef de coördinaten van het punt in het cilindrisch coördinatenstelsel (r, θ, z) en het bolcoördinatenstelsel (r, θ, ϕ).
   Geef ook een schets waaruit de definities van de hoeken van het bolcoördinatenstelsel blijken.
   (b) Bereken de oppervlakte van een cilinder met straal a en hoogte h door integraalrekening met cilindercoördinaten.

3. Bereken het volume van de kolom met aan de basis de hoekpunten $(0, 1)$, $(2, 1)$ en $(1, 2)$ (d.w.z. in het (x, y)-vlak met $z = 0$) tot aan het oppervlak op hoogte $z = 2x + y$.

4. Gegeven is het potentiaalveld ϕ:
$$\phi = yz(x^2y + xz + y^2).$$
   (a) Bereken $\nabla\phi$ en $\nabla^2\phi$.
   (b) Bereken de richtingsafgeleide (directional derivative) van ϕ in punt $(1, 1, 1)$ in de richting van $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
   (c) Het oppervlak met een potentiaal van 12 wordt gegeven door $\phi = 12$.
   Bepaal het raakvlak aan dit oppervlak in het punt $(1, 1, 1)$.

5. Gegeven is een krachtenveld $\mathbf{F}$:
$$\mathbf{F} = (2xy - z^3)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + (-3xz^2 - 1)\mathbf{k}.$$
   (a) Bereken $\nabla \cdot \mathbf{F}$ en $\nabla \times \mathbf{F}$.
   (b) Bereken de arbeid $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ van $(0, 0, 0)$ tot (x, y, z) voor een pad dat eerst langs de x-as loopt, vervolgens in de y-richting gaat, en daarna in z-richting.

6. (a) Geef de stelling van Gauss (het divergentie theorema) en de stelling van Stokes.
   (b) Bereken de oppervlakte-integraal
$$\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$
   met $\mathbf{F} = (y^2 - x^2)\mathbf{i} + (2xy - y)\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$, waarbij het integratie-oppervlak σ een bol is begrensd door $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.