

# Lineaire Algebra en Vector Analyse (GEO2-1201)

9 november 2011, 10.00-13.00

## DEEL 1

Toon ook de tussenstappen.

1. Los (indien mogelijk) de volgende twee stelsels van vergelijken op.  
Als er een oplossing is, geef dan aan of het een punt, lijn, of vlak is.

(a)

$$\begin{aligned}2x - 3y + 5z &= 0 \\x + 2y - z &= 0 \\x - 5y + 6z &= 0 \\4x + y + 3z &= 0\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 0 \\4x + 5y + 6z &= 3 \\7x + 8y + 9z &= 0\end{aligned}$$

2. Gegeven zijn de volgende twee vlakken:

$$\begin{aligned}2x + y - 2z &= 3 \\3x - 6y - 2z &= -4\end{aligned}$$

- (a) Bepaal de hoek tussen deze twee vlakken. (De cosinus of de sinus van de hoek is voldoende).  
(b) Geef een punt dat op beide vlakken ligt.  
(c) Bepaal een vector evenwijdig aan de snijlijn van de twee vlakken.  
(d) Bepaal de snijlijn van de twee vlakken.

3. Gegeven is de matrix  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

- (a) Bereken de inverse van  $A$ .  
(b) Gebruik  $A^{-1}$  om de matrix  $B$  te berekenen als geldt  $AB = C$ , waarbij

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. (a) Bereken de inverse van de transformatie

$$\begin{aligned}x' &= \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y) \\y' &= \frac{1}{2}(-\sqrt{3}x + y)\end{aligned}$$

- (b) Beschrijft de transformatie een reflectie of rotatie? Geef de reflectie-as of de rotatie-hoek.

5.  $A$  en  $B$  zijn  $n \times n$  matrices.

- (a) Is de vergelijking  $\det(2A) = 2 \det(A)$  waar of niet? Verklaar.  
(b) Is de vergelijking  $(AB)^2 = A^2B^2$  waar of niet? Verklaar.  
(c) Toon aan dat  $(AI)B = AB$  met behulp van indexnotatie.

# Lineaire Algebra en Vector Analyse (GEO2-1201)

9 november 2011, 10.00-13.00

## DEEL 2

Toon ook de tussenstappen.

1. De matrix  $M$  is gegeven als

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Bereken de eigenwaarden van  $M$  en geef bijbehorende eigenvectoren.  
(b) Geef een diagonaalmatrix van eigenwaarden,  $D$ , met bijbehorende matrix van eigenvectoren,  $C$ .  
Wat is de relatie tussen  $M$ ,  $C$  en  $D$ ?  
Wat is de betekenis van  $D$  en  $C$ ?

2. (a) Een punt is gegeven in het Cartesisch coördinatenstelsel  $(x, y, z) = (-\sqrt{6}, -\sqrt{6}, -2)$ .  
Geef de coördinaten van het punt in het cilindrisch coördinatenstelsel  $(r, \theta, z)$  en het sferisch coördinatenstelsel  $(r, \theta, \phi)$ .  
Geef ook een schets waarin de hoeken van het sferisch coördinatenstelsel aangegeven zijn.  
(b) Bereken het volume van een cilinder met straal  $a$  en hoogte  $h$  door integraalrekening met cilindercoördinaten.
3. Bereken het volume van de kolom boven de driehoek met hoekpunten  $(0, 2)$ ,  $(1, 1)$  en  $(2, 2)$  in het  $(x, y)$ -vlak, en het vlak op hoogte  $z = xy$ .
4. (a) Bereken de richtingsafgeleide (directional derivative) van  $\phi = x^2y + xz + y^2$  in het punt  $(1, 2, -1)$  in de richting  $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ .  
(b) Bereken ook  $\nabla^2\phi$  voor  $\phi = x^2y + xz + y^2$ .  
(c) Bereken  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  voor  $\mathbf{V} = x^2y\mathbf{i} + xz\mathbf{k}$ .
5. Gegeven is het vectorveld  $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k}$ .  
(a) Bereken  $\nabla \times \mathbf{F}$ . Is  $\mathbf{F}$  conservatief?  
(b) Bepaal de scalaire potentiaal  $\phi$  waarvoor geldt:  $\mathbf{F} = -\nabla\phi$ .
6. (a) Geef de stelling van Gauss (het divergentie theorema) en de stelling van Stokes.  
(b) Gegeven is het vectorveld  $\mathbf{A} = 2y\mathbf{i} - 3x\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ , en een vierkant  $V$  in het  $(x, y)$ -vlak langs de lijnen  $x = 3$ ,  $x = 5$ ,  $y = 1$ ,  $y = 3$ .  
Bereken de circulatie van  $\mathbf{A}$  langs de omtrek van het vierkant:

$$\oint_{\text{omtrek van } V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$