Lineaire Algebra en Vector Analyse (GEO2-1201)

6 januari 2011, 13:30-16:30

Herkansing Deel 2

Toon ook de tussenstappen.

1. De matrix M is gegeven als

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van M.

(b) Geef een diagonaalmatrix van eigenwaarden, D, en de bijbehorende matrix van eigenvectoren, C. Wat is de relatie tussen M, C en D?

2. (a) Een punt is gegeven in het Cartesisch coördinatenstelsel (x, y, z) als $(-4, 4, 4\sqrt{6})$.
Geef de coördinaten van het punt in het cilindrisch coördinatenstelsel (r, θ, z) en het sferisch coördinatenstelsel (r, θ, ϕ).
Geef ook een schets waarin de hoeken van het sferisch coördinatenstelsel aangegeven zijn.

(b) Bereken(!) het volume van een bol met straal a.

3. Bereken het volume tussen de vlakken $z = 2x + 3y + 6$ en $z = 2x + 7y + 8$ en boven de driehoek met hoekpunten $(0, 0)$, $(3, 0)$, en $(2, 1)$.

4. (a) Bereken de gradiënt $\nabla\phi$ en de Laplaciaan $\nabla^2\phi$ van het scalar veld ϕ

$$\phi = x^2 - 3xy^2 + 6yz$$

Bereken ook de richtingsafgeleide (directional derivative) in punt $(1, 1, 1)$ in de richting $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

(b) Bereken de divergentie $\nabla \cdot \mathbf{V}$ en de rotatie (curl) $\nabla \times \mathbf{V}$ waarbij

$$\mathbf{V} = (x + y)^3\mathbf{i} + \sin(xy)\mathbf{j} + \cos(xyz)\mathbf{k}$$

5. Gegeven is het vectorveld $\mathbf{A} = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$,
en een rechthoek σ die in het x-y-vlak ligt en begrensd wordt door de zijden $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, en $y = b$.

(a) Bereken $\nabla \times \mathbf{A}$, en geef de normaal $\mathbf{n}$ op de rechthoek σ.
Bereken vervolgens

$$\iint_\sigma (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

(b) Bereken(!) tevens

$$\oint_{\text{pad langs } \sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

Verklaar waarom het antwoord hetzelfde is (of niet) als bij (a).