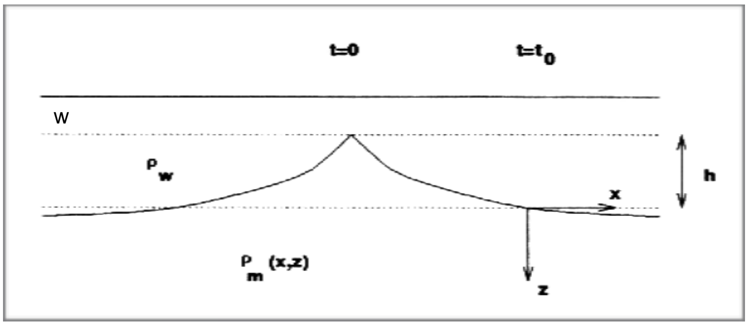
Uitwerking Voortgangstoets #2 Lithosfeer Dynamica 7 maart 2017

Opgave 1. Bathymetrie gewijzigd grenslaagmodel

(a) Isostatisch evenwicht betekent dat de druk op een bepaalde diepte (de *compensatiediepte)* lateraal uniform is. Druk wordt vertaalt naar gewicht volgens $P = \int \rho g \, \mathrm{d}z$. In oceanische lithosfeer door Pratt isostasie, d.w.z. laterale verschillen in de gemiddelde dichtheid van de lithosfeer worden gecompenseerd door laterale verschillen in bathymetric.

(b) Een schets is noodzakelijk!



Geometrie gebruikt bij analyse van de diepte van de oceaanbodem

Vergelijk de drukken van de twee kolommen op compensatiediepte $z = L(t_0)$ (daaronder is de dichtheidsstructuur hetzelfde bij de rug en bij de oudere kolom:

$$P(0) = gw\rho_w + g\int_{-h}^{L(t_0)} \rho(z,0)\mathrm{d}z = gw\rho_w + g\int_{-h}^{0} \rho(z,0)\mathrm{d}z + g\int_{0}^{L(t_0)} \rho(z,0)\mathrm{d}z$$

$$P(t_0) = g(w+h)\rho_w + g\int_{0}^{L(t_0)} \rho(z,t_0)\mathrm{d}z$$

De temperatuur bij de rug is T_a op iedere diepte. Daarom is

$$P(0) = gw\rho_w + g\rho_a h + g\int_{0}^{L(t_0)} \rho_a \, \mathrm{d}z$$

$$P(t_0) = g(w+h)\rho_w + g\int_{0}^{L(t_0)} \rho(z,t_0)\mathrm{d}z$$

Isostasie betekent dat de druk uniform is op de compensatiediepte, $P(0) = P(t_0)$, waardoor we de vergelijkingen kunnen herschrijven:

$$g(\rho_a - \rho_w)h = g\int_{0}^{L(t_0)} \left(\rho(z,t_0) - \rho_a\right)\mathrm{d}z \quad \Leftrightarrow \quad (\rho_a - \rho_w)h = \rho_a \alpha \int_{0}^{L(t_0)} \left[T_a - T(z,t)\right]\mathrm{d}z$$

Hierbij heb ik gebruikt dat:

$$\rho(z,t) = \rho_a\left[1-\alpha\left(T(z,t)-T_a\right)\right]$$

Hierdoor is

$$h = \frac{\rho_a \alpha}{(\rho_a - \rho_w)} \int_0^{L(t_0)} \left[T_a - T(z,t)\right] \mathrm{d}z$$

Voor het gewijzigd grenslaagmodel wordt de temperatuur gegeven door:

$$T(z,t) = \left(\frac{3T_a}{2} - \frac{q_a L}{2k}\right)\left(\frac{z}{L}\right) + \left(\frac{q_a L}{2k} - \frac{T_a}{2}\right)\left(\frac{z}{L}\right)^3$$

Voor de diepte van de oceaanbodem ten opzichte van de rug krijgen we dan:

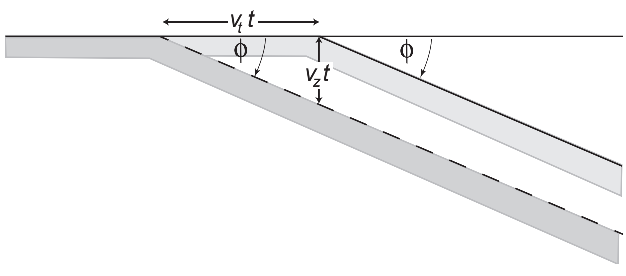
$$h = \frac{\rho_a \alpha}{(\rho_a - \rho_w)} \int_0^{L(t_0)} \left[T_a - \left(\frac{3T_a}{2} - \frac{q_a L}{2k}\right)\left(\frac{z}{L}\right) - \left(\frac{q_a L}{2k} - \frac{T_a}{2}\right)\left(\frac{z}{L}\right)^3\right] \mathrm{d}z$$

en dit geeft

$$\begin{aligned}
h &= \frac{\rho_a \alpha}{(\rho_a - \rho_w)}\left[T_a L - \left(\frac{3T_a}{2} - \frac{q_a L}{2k}\right)\left(\frac{L^2}{2L}\right) - \left(\frac{q_a L}{2k} - \frac{T_a}{2}\right)\left(\frac{L^4}{4L^3}\right)\right] \\
&= \frac{\rho_a \alpha}{(\rho_a - \rho_w)}\left[T_a L - \frac{3T_a L}{4} + \frac{T_a L}{8} + \frac{q_a L^2}{4k} - \frac{q_a L^2}{8k}\right] \\
&= \frac{\rho_a \alpha L}{8(\rho_a - \rho_w)}\left[3T_a + \frac{q_a L}{k}\right]
\end{aligned}$$

Opgave 2. Snelheid van trench roll-back

__Figuur bij Opgave 2.__ Verband tussen horizontale snelheid van de trog en de verticale zinksnelheid. Na een tijd t is de slab verticaal gezonken over de afstand $v_z t$. Als de hellingshoek van de slab ϕ blijft gedurende deze tijd, moet de trog over een afstand $v_t t$ verplaatsen.



In de figuur is te zien dat

$$\tan\phi = \frac{v_z t}{v_t t} \Leftrightarrow v_t = \frac{v_z}{\tan\phi}$$

Opgave 3

(a) Wanneer de plaat niet meer afkoelt is de warmtestroom die vanonder de plaat binnenkomt gelijk aan de warmtestroom die er vanboven weer uitgaat, er is namelijk geen warmteproductie in oceanische lithosfeer. De warmtestroom is dus overal in de plaat gelijk. Omdat de conductiviteit uniform is, is de temperatuurgradiënt dT/dz daarom overal gelijk/constant. De temperatuur neemt dus lineair toe met de diepte.

Wanneer de oppervlaktetemperatuur nul is, is

$$T(z) = \frac{z}{L} T_a$$

Check dat dimensies en uitkomsten kloppen.

(b) De gemiddelde temperatuur tussen *z=0* en *z=L* is T_a op *t=0.* De gemiddelde temperatuur is $T_a/2$ na (oneindig) lange tijd. De verandering in warmte-inhoud van een verticale kolom met oppervlakte van 1 m^2 en hoogte *L* (volume *L*) is daarom $\Delta Q = \rho C_p L \frac{T_a}{2}$. Check:

$[\Delta Q] = \frac{kg}{m^3} \frac{J}{kg\ K} m^3\ K = J$.

Opgave 4. Opwarmen oceanische lithosfeer

1. beginvoorwaarde dat $T(z,0) = f(z)$
2. randvoorwaarde dat $T(0,t) = T_a \quad t > 0$
3. randvoorwaarde dat $T(L,t) = T_a \quad t > 0$

Gebruik makend van de eerste randvoorwaarde $T(z=0, t>0) = T_a$ wordt de vergelijking

$$1 = A_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \exp\left(-m_i^2 \kappa t\right) B_{2i}$$

Dit geldt voor alle waarden van t , waardoor $A_1 = 1$ en $B_{2i} = 0$. De tweede randvoorwaarde $T(z=L, t>0) = T_a$ geeft als resultaat:

$$0 = A_2 L + \sum_{i=1}^{\infty} \exp\left(-m_i^2 \kappa t\right) B_{1i} \sin(m_i L)$$

De keuze $B_{2i} = 0$ zou leiden tot een zuiver stationaire oplossing. Dit is niet wenselijk omdat we juist op zoek zijn naar de tijdafhankelijke oplossing. Zodoende is $A_2 = 0$ en $m_i = n\pi/L$ waarbij $n = 1, 2, 3, ...$

De gevonden waarden voor de constanten worden geven daarmee:

$$T(z,t) = T_a\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{L^2}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right)\right] \qquad (B_n = B_{1i})$$