Tussentoets 2 Wiskunde Blok I

Donderdag 22 oktober 2015, 15:15-17:15

Succes!

1. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2a^3}{1+a^2} \tag{1}$$

met als beginvoorwaarde

$$a(0) = 1$$

De oplossing van deze differentiaalvergelijking (1) wordt gegeven door de **impliciete** vergelijking

$$t(a) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2} - 1\right) + \frac{1}{2}\ln(a) \tag{2}$$

Normaal gesproken is de oplossing van een dergelijke differentiaalvergelijking gegeven als $a(t) = ...$ Deze oplossing (2) is echter **impliciet** omdat het onmogelijk is om dit te schrijven als $a(t) = ...$ Toon aan d.m.v. **impliciete differentiatie** van (2) naar t dat deze oplossing voldoet aan de differentiaalvergelijking. Hint: Bepaal de $\frac{d}{dt}$ van (2) en kijk of het resultaat de differentiaalvergelijking (1) oplevert.

2. Gegeven is de vergelijking

$$y(x) = x^x$$

(a) Bepaal de afgeleide van deze functie

(b) **(Bonus vraag)** Bepaal de afgeleide van

$$y(x) = x^{x^x}$$

5. Bepaal de locale lineaire benaderingen[1] van de volgende functies rond het punt $x_0 = \frac{1}{2}$

   (a) $\dfrac{1}{1+x}$

   (b) e^{-x}

   (c) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

6. Waar of niet waar: (motiveer je antwoord m.b.v. wiskunde!)

   (a) Alle continue functies zijn differentieerbaar

   (b) Alle differentieerbare functies zijn continu

   (c) Een functie $f(x)$ is differentieerbaar in een punt $x = x_0$ als geldt:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

   (d) Voor welke waarde van $k \neq 0$ wordt deze stuksgewijze functie continu[2] in het punt $x = 0$?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(kx)}{x} & x < 0 \\ 4x + 4k^2 & x \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

   (e) Stel dat het antwoord op de vorige vraag $k = \frac{1}{4}$ is. Is deze continue functie dan differentieerbaar in $x = 0$?

..... Einde .....

[1]Lineaire benadering van de functie $f(x)$ rond het punt $x = x_0$ wordt gegeven door: $f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$

[2]Bedenk dat

$$\lim_{a \to 0} \frac{\sin(a)}{a} = 1$$