Tentamen Wiskunde Blok 2

Vrijdag 1 februari 2008, 9:00-12:00
Veel succes!

1. We beschouwen de partiële differentiaalvergelijking (PDV) die de beweging van een grensvlak tussen zoet en zout grondwater beschrijft in een aan de boven en onderkant afgesloten oneindig lange zandlaag. Deze vergelijking is voor het eerst opgesteld door de Nederlandse hoogleraar Grondmechanica Gerard de Josseling de Jong. De vergelijking luidt:
$$\frac{\partial h}{\partial t} = \Gamma \frac{\partial}{\partial x}\left[h(1-h)\frac{\partial h/\partial x}{1+(\partial h/\partial x)^2}\right]$$
waarin $h = h(x,t) \in [0,1]$ de geschaalde positie (hoogte) van het zoet-zout grensvlak is ten opzichte van de ondoorlaatbare horizontale basis, en Γ een constante. Voor het gemak stellen we $\Gamma = 1$. Indien het grensvlak vrij horizontaal is, d.w.z. wanneer $\partial h/\partial x << 1$ dan geldt
$$1 + (\partial h/\partial x)^2 \approx 1$$
en vereenvoudigt de PDV tot
$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[h(1-h)\ \partial h/\partial x\right]$$
Ook deze vereenvoudige vergelijking heeft merkwaardig genoeg als oplossing een "roterende rechte lijn" van de vorm:
$$h(x,t) = a(t)\ x + \frac{1}{2}$$
waarin $a(t)$ de tijdsafhankelijke richtingscoëfficient van de roterende lijn is.

   (a) Toon aan door substitutie dat deze oplossing inderdaad een oplossing is van de benaderde PDV. (Hint 1: dit geeft een gewone eerste-orde differentiaalvergelijking voor $a(t)$! Hint 2: let op het 'merkwaardigprodukt' dat de term $h(1-h)$ oplevert!)

(b) Gegeven is dat de beginvoorwaarde voor a gegeven is door $a(0) = 1$, d.w.z. een begin grensvlak onder een hoek van 45^o. Toon aan doormiddel van interatie van de onder (a) gevonden differentiaalvergelijking dat de oplossing van dit beginvoorwaardeprobleem voor $a(t)$ gegeven wordt door

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}}$$

2. Gebruik breuksplitsen om de volgende integralen te bepalen

(a)

$$\int \frac{2x+4}{x^2-2x}\,dx$$

en

(b)

$$\int \frac{2x+4}{x^3-2x^2}\,dx$$

3. Gegeven is de tweede-orde homogene differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 13\,y = 0$$

(a) Bepaal de algemene oplossing van deze DV

(b) Los het beginvoorwaardeprobleem $y(0) = -2$ en $y'(0) = +2$ op

4. Gegeven is de functie

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

(a) Laat zien dat $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ langs de verzameling rechte lijnen $y = mx$ met $m \in R, m \neq 0$.

(b) Houdt dit resultaat in dat $f(x,y) = 0$ als $(x,y) \to (0,0)$ en de limiet dus bestaat in wiskundige zin?

(c) Bepaal de waarde van de limiet indien we het punt (0,0) benaderen via een verzameling parabolen van de vorm $y = kx^2$ met $k \in R$, $k \neq 0$. Wat is je conclusie?

(d) Laat zien dat de partiële afgeleide $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ gegeven wordt door

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2\left(x^4 - y^2\right)}{\left(x^4 + y^2\right)^2}$$

(e) Bestaat de limiet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}?$$

Hint: Gebruik de parametrisatie $x = t$ en $y = mt$ en bepaal de limiet $\lim_{t\to 0} f(t)$ en trek je conclusie.

5. Bepaal de eerste 5 termen van de Maclaurinreeks van de functie

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

6. Gegeven is een cubus met ribbe a.

(a) Bepaal de hoek tussen de twee niet-samenvallende lichaamsdiagonalen $\bar{u} =< a, a, a >$ en $\bar{v} =< a, a, -a >$

(b) Bepaal de vector die loodrecht op het vlak staat dat opgespannen wordt door de vectoren $\bar{u}$ en $\bar{v}$.

(c) Het volume van de cubus is uiteraard a^3. Toon dit aan door gebruik te maken een combinatie van het inwendig en uitwendig product. Hint: de zijden van de cubus worden gegeven door de vectoren $< a, 0, 0 >$, $< 0, a, 0 >$ en $< 0, 0, a >$.

(d) Toon aan dat

$$||\bar{u} \times \bar{v}|| = \bar{u} \cdot \bar{v}\ \tan(\theta)$$

waarin θ de hoek tussen de vectoren voorstelt.