Hertentamen Wiskunde Blok II

Vrijdag 25 februari 2005

13:00-16:00

Veel succes!

1. Indien een parachutist uit een vliegtuig springt zal hij eerst een versnelde valbeweging maken. De versnelling neemt al vallende af totdat hij een constante snelheid gereikt. Deze constante snelheid ontstaat door dat er een evenwicht optreedt tussen de kracht die op de parachutists t.g.v. de zwaartekracht werkt $F_z = -mg$ en de vrijvingskracht $F_w = -cv$ die ontstaat door de wrijving met de lucht. Hierin is m de massa van de parachutist, g de versnelling t.g.v. de zwaartekracht, v de valsnelheid, en c een evenredigheidsconstante.

   De volgens de tweede Wet van Newton voldoet de valbeweging aan de differentiaalvergelijking:

$$-mg - cv = m\frac{dv}{dt}.$$

   Let op: dit is dus een differentiaalvergelijking in termen van de onbekende snelheid $v = v(t)$!

   a. Schijf deze vergelijking in de standaard vorm

$$\frac{dv}{dt} + p(t)v = q(t).$$

   b. Geef de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking (òf via scheiden van variabelen òf via de integrerende factor!)

   c. De parachutist 'stapt' uit het vliegtuig, zodanig dat zijn snelheid op $t = 0$ nul is: dus $v(0) = 0$. Bepaal de oplossing van dit beginvoorwaardeprobleem. M.a.w. bepaal $v(t)$.

   d. Na enige tijd wordt de valsnelheid van de parachutist constant. Bepaal deze snelheid in termen van de constanten g, m en c.

e. Bij nader inzien blijkt de wrijvingskracht evenredig te zijn met de valsnelheid in het kwadraat: $F_w = -cv^2$. Voor het gemak stellen we $m = c = g = 1$ (onrealistisch natuurlijk!). De vergelijking wordt dan

$$\frac{dv}{dt} + v^2 = -1.$$

Los deze vergelijking op m.b.v. een geschikte methode.

2. Gebruik een u-substitutie om de volgende integraal te bepalen:

$$\int \frac{e^{-2x}}{4 - e^{-2x}}\, dx =$$

3. We beschouwen twee vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ in de driedimensionale ruimte. De vectoren grijpen in het zelfde punt aan en maken een hoek θ met elkaar. Slechts voor één waarde van deze hoek geldt het volgende:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||$$

a. Voor welke unieke waarde van de hoek θ is dit het geval? Hint: gebruik de definities van het inwendig product en van de norm van het uitwendig product!

b. De bovengenoemde vectoren worden nu gegeven door: $\mathbf{u} =< 1, 2, 1 >$ en $\mathbf{v} =< 0, 1, 2 >$. Bereken het oppervlak van de driehoek die opgespannen wordt door deze twee vectoren met behulp van het uitwendig product.

c. Gegeven zijn twee vectoren: $\mathbf{u} =< 1, 1, a >$ en $\mathbf{v} =< 2, 1, 1 >$. Hierin is $a \in \mathbf{R}$. Voor welke waarde van a is de hoek tussen deze vectoren precies gelijk aan $\pi/2$?

d. Is er voor iedere waarde van a een vector te berekenen die orthogonaal op $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ staat? Laat dit door een eenvoudige berekening zien!

4. Gegeven zijn de zogenaamde *Cauchy-Riemann vergelijkingen*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

a. Laat zien dat de functies $u(x, y) = x^2 - y^2$ en $v(x, y) = 2xy$ aan deze twee vergelijkingen voldoen.

b. Door de eerste vergelijking nog een keer naar x te differentieren, en de tweede nog een keer naar y kunnen we aantonen dat er ook geldt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Toon aan dat de functie $u(x, y) = e^x \sin(y)$ aan deze partiële differentiaalvergelijking voldoet.

5. Gegeven is de functie:

$$f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$$

a. Toon aan dat indien we het punt $(x, y) \to (0, 0)$ benaderen via een willekeurige rechte lijn $y = mx$ $(m \neq 0)$, dit altijd de waarde nul oplevert.

b. Sterker nog, indien we dat zelfde punt via een willekeurige parabool $y = kx^2$ $(k \neq 0)$ benaderen levert de limiet ook nul op. Toon ook dit aan.

c. Echter zodra we het punt (0,0) via de curve $y = x^3$ benaderen, is er iets anders aan de hand. Bereken de waarde van de limiet in dat geval. Wat is je conclusie m.b.t. het al dan niet bestaan van de limiet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$$

Uiterkingen hertentamen Wiskunde Blok II, 25 februari 2005

1. (a)

$$\frac{dv}{dt} + \left(\frac{c}{m}\right) v = -g$$

dus $p(t) = c/m$ en $q(t) = -g$

(b) Scheiden van variabelen

$$\frac{dv}{g + \frac{c}{m} v} = -dt$$

Substitutie: $u = g + (c/m)v$ en dus $du = (c/m)\, dv$

$$\frac{m}{c} \ln \left| g + \frac{c}{m} v \right| = -\frac{c}{m} t + C_1$$

zodat

$$g + \frac{c}{m} v = C_2 e^{-\frac{c}{m} t} \text{ en dus } v(t) = C_3 e^{-\frac{c}{m} t} - \frac{mg}{c}$$

Integrerende factor $p(t) = c/m$ en $q(t) = -g$ dus

$$\mu(t) = e^{\int p(t)\, dt} = e^{\frac{c}{m} t}$$

$$v(t) = \frac{1}{\mu} \left(\int q(t) \mu(t)\, dt + C \right) = e^{-\frac{c}{m} t} \left(- \int g e^{\frac{c}{m} t}\, dt + C \right) =$$

$$e^{-\frac{c}{m} t} \left(-\frac{mg}{c} e^{\frac{c}{m} t} + C \right) = C e^{-\frac{c}{m} t} - \frac{mg}{c}$$

(c) $v(0) = 0$ geeft

$$0 = -\frac{mg}{c} + C e^0 \quad \rightarrow \quad C = +\frac{mg}{c}$$

zodat

$$v(t) = \frac{mg}{c} \left(e^{-\frac{c}{m} t} - 1 \right)$$

(d) v is constant als $dv/dt = 0$ dus: $-mg - vc = 0$ zodat $v = -mg/c$

(e)

$$\frac{dv}{dt} = -(1 + v^2) \quad \rightarrow \quad \int \frac{dv}{1 + v^2} = -\int dt$$

Standaard integraag (opzoeken) of goniometrische substitutie geeft

$$\frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C \quad \text{met in dit geval a=1, dus} \quad \tan^{-1}(v) = -t + C$$

zodat

$$v(t) = \tan(-t + C)$$

2. Stel $u = 1 + e^{-x^2}$, zodat $du = -2xe^{-x^2}\,dx$
dan is de teller $xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\,du$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\ln|u| + C = -\frac{1}{2}\ln(1+e^{-x^2}) + C$$

3. (a) Inwendig product $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = ||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||\cos(\theta)$
Norm van het uitwendig product $||\mathbf{u}\times\mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||\sin(\theta)$ Dus $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = ||\mathbf{u}\times\mathbf{v}||$ als $\cos(\theta) = \sin(\theta)$, dus als $\tan(\theta) = 1$. Dus $\theta = \tan^{-1}(1) = \pi/4$.

   (b) Oppervlakte driehoek $= \frac{1}{2}||\mathbf{u}\times\mathbf{v}||$ Bereken het uitwenig product: $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, en de norm $||\mathbf{u}\times\mathbf{v}|| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$ Het oppervlak van de driehoek is dus $\frac{1}{2}\sqrt{14}$.

   (c) Inwendig product $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 2 + 1 + a = 3 + a$ De hoek is 90^o, dus $\cos(\pi/2) = \cos(90^o) = 0$. Dus $3 + a = 0$, zodat $a = -3$

   (d)

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-a)\mathbf{i} - (1-2a)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

Dit kan voor iedere reëele waarde van a, dus $a \in \mathbf{R}$

4. (a) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ en $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$, is inderdaad aan elkaar gelijk. $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$ en $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$, zodat inderdaad $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

   (b) $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\sin(y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x\sin(y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = e^x\cos(y)$ en $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x\sin(y)$ Invullen in de vergelijking: klopt!

5. (a) $y = mx$, parametriseren geeft $x = t$ en $y = mt$, zodat

$$\lim_{t\to 0}\frac{mt^4}{t^6 + m^2t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{mt^2}{t^4 + m^2} = 0$$

   (b) $y = kx^2$, parametriseren geeft $x = t$ en $y = kt^2$, zodat

$$\lim_{t\to 0}\frac{kt^5}{t^6 + k^2t^4} = \lim_{t\to 0}\frac{kt}{t^2 + k^2} = 0$$

   (c) $y = x^3$, geeft $x = t$ en $y = t^3$, zodat

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^6}{2t^6} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$