Tentamen Wiskunde Blok II

Donderdag 28 januari 2016, 13:30-16:30

Succes!

1. Vroeger werd kleding beschermd tegen motten door bolletjes kamfer (ook wel 'mottenballen' genaamd). De kamfer uit deze bolletjes verdampt en die stank houdt de motten op afstand... (overigens ook de medemens, maar dat terzijde). De kamfer kan alleen aan het oppervlak van het bolletje verdampen. Daarom is de massa die per tijdseenheid verdampt evenredig met het oppervlak van het bolletje. Door het verdampen neemt dit oppervlak af (het bolletje krimpt immers). Van een bol weten we het volgende:

$$\text{oppervlak v.e. bol} = A_{\text{bol}} = 4\pi r^2 \text{ en volume v.e. bol} = V_{\text{bol}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

De massa afname van het kamferbolletje wordt beschreven m.b.v. de

volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{dm}{dt} = -\beta A_{\text{bol}} = -\beta 4\pi r^2,$$

waarin $r = r(t)$ [m] de straal van het bolletje is, $m = m(t)$ [kg] de massa van het bolletje, t [s] de tijd en β is een evenredigheidsconstante.

(a) Wat is de eenheid (dimensie) van de evenredigheidsconstante β?

(b) Ook geldt er

$$m = \rho V_{\text{bol}} = \rho\frac{4}{3}\pi r^3,$$

waarin ρ [kg/m^3] de dichtheid van het bolletje is. Toon aan dat geldt:

$$\frac{dm}{dt} = -km^{\frac{2}{3}},$$

waarin k een andere evenredigheidsconstante is.

(c) Bepaal de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking.

(d) Als op $t = 0$ de massa van het bolletje $m(0) = m_0$ is bepaal dan in formule vorm hoeveel tijd nodig is om het hele bolletje te laten verdampen?

2. Bereken de volgende bepaalde integraal met behulp van **patiële integratie**

$$\int_0^1 \ln\left(x^x\right)\ dx$$

Hint: Bij het invullen van de ondergrens moet je de limiet $\lim_{x\to 0} \frac{1}{2}x^2 \ln x$ berekekenen met L'Hôpital.

3. Indien een badminton shuttle naar beneden valt werken er drie krachten op de shuttle: zwaartekracht, opwaartse kracht en wrijvingskracht. De opwaartse kracht (= Wet van Archimedes: Eureka!) in lucht is verwaarloosbaar. Voor de wrijvingskracht geldt:

$$F_{\text{wrijving}} = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2,$$

waarin c_w een weerstandsfactor is (die van de vorm van de shuttle afhangt), ρ [kg/m^3] de dichtheid van de lucht is, A [m^2] het (frontale) oppervlak van de shuttle is en v [m/s] de snelheid van de shuttle. De totale kracht die

op de shuttle werkt (Wet van Newton) is:

$$F_{\text{totaal}} = F_{\text{zwaartekracht}} - F_{\text{wrijving}},$$

zodat

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{2}c_w \rho A v^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g - kv^2,$$

waarin $k = \frac{1}{2}c_w \rho A/m$. Voor het gemak kiezen we $k = 1$ en $g = 1$ (niet erg realistisch.... Anyway).

(a) Laat zien met behup van **breuksplitsen** dat de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking gegeven wordt door

$$v(t) = \frac{Ce^{2t} - 1}{Ce^{2t} + 1},$$

waarin C een integratieconstante is. Hint: Merkwaardig product $(1 - v^2) = (1 - v)(1 + v)$.

(b) We laten de shuttle van af een bepaalde hoogte vallen: beginsnelheid is nul. Dus $v(0) = 0$. Beplaal de particuliere oplossing $v(t)$ voor dat geval.

(c) Wat is de eind(evenwichts)snelheid van de shuttle?

4. Gegeven is de functie

$$f(x, y, z) = 4xy^2z^3 + x^2y^3z$$

(a) Bepaal de **gradient**[1] grad(f)

(b) Toon aan dat de **divergentie**[2] **van de gradient** div(grad(f)) = 40 in het punt (1,1,1)

5. Een balk wordt opgespannen door de volgende drie vectoren $\bar{u} =< 4a, 0, 0 >$, $\bar{v} =< 0, a, 0 >$ en $\bar{w} =< 0, 0, a >$. Hint: schets de balk even.

(a) Bepaal de hoek tussen de lichaamsdiagonaal (loopt van (0,0,0) tot (4a,a,a)) en de x-as met behulp van het **inwendig product**. Gebruik de GR om de hoek in graden uit te rekenen.

(b) Controleer je antwoord door gebruik te maken van het **uitwendig product**. Gebruik opnieuw de GR.

(c) Bereken het volume van de balk met behulp van het **scalair tripple product** $|\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})|$

6. Gegeven is de functie

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + 4y}{2y - 5x^2}$$

Bereken de limiet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$$

via de oneindig grote verzameling parabolen $x = ky^2$, met $k \in \mathbf{R}$. Is deze functie continu in (0,0)? Motiveer je antwoord met behulp van wiskundige bewoordingen!

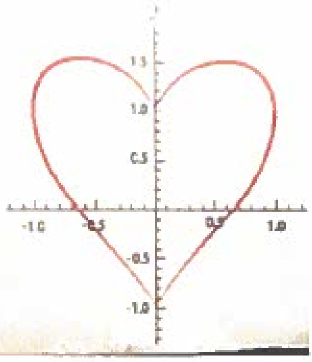
[1] grad f = $< \partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z >$

[2] divergentie van een vector $\bar{u}$ = div $\bar{u}$ $= \partial u_x/\partial x + \partial u_y/\partial y + \partial u_z/\partial z$

7. **BONUS** Bepaal de **twee** afgeleiden van de onderstaande grafiek in het punt $x = +\frac{1}{8}$. Hint: Let op de $\pm$!

$$x^2 + \left(y - \sqrt[3]{x^2}\right)^2 = 1$$

Droge wiskunde is soms tot mooie dingen in staat. In grafische vorm blijkt het gegeven verband tussen x en y opeens een perfect hartje op te leveren. De Amerikaanse *nerd shirt*-maker ThinkGeek zette de functie op de voorkant van een speciaal valentijnsshirt. Voor de liefhebbers. Op de rug van het shirt staat de resulterende curve. Die zal meer mensen iets zeggen.



.... Einde........