Tussentoets 2 Differentiaalvergelijkingen

Dinsdag 15 december 2015, 11:00-12:45
Succes!

1. Bepaal de algemene oplossing van de volgende differentiaalvergelijking

$$(4x^2+1)\frac{dy}{dx}-8x=0$$

2. Gegeven is de zogenaamde Logistieke Differentiaalvergelijking voor de groei/afname van een populatie dieren in een ecologisch systeem:

$$L\frac{dy}{dt}=k(L-y)y,$$

waarin $y=y(t)$ het aantal dieren in de populatie op tijstip t is. L is de evenwichtspopulatie en k is een evenredigheidsconstante.

   (a) Voor het gemak kiezen we $k=1$. Bepaal de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking.

   (b) Gegeven is de beginvoorwaarde $y(0)=y_0$. Toon aan dat de particuliere oplossing in dat geval gelijk is aan:

$$\frac{y(t)}{y_0}=\frac{L}{1+\left(\frac{L}{y_0}-1\right)e^{-t}}$$

   (c) Voor welke waarde van y is de groei/afname snelheid $\frac{dy}{dt}$ maximaal?

   (d) Heeft deze vergelijking triviale oplossingen[1]? Zo ja leg dan uit welke dat zijn.

3. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$x\frac{dy}{dx}-x\,e^{2x}+y=0$$

[1] Een triviale oplossing is een oplossing die voor elke waarde van t gelijk is aan de begin-conditie

(a) Schrijf deze vergelijking in de vorm van een lineaire eerste-orde differentiaalvergelijking.

(b) Bepaal de algemene oplossing met behulp van een integrerende factor

4. Gegeven is de volgende homogene tweede-orde differentiaalvergelijking met constante coëfficienten

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 10\frac{dy}{dx} + ky = 0$$

(a) Voor welke waarde(n) van k heeft deze differentiaalvergelijking een algemene oplossing in de vorm

$$y(x) = e^{mx}(C_1 + xC_2)$$

(b) Indien $k = 0$ bepaal dan de oplossing van het beginvoorwaarde-probleem

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 10\dfrac{dy}{dx} = 0 \\ y(0) = 0 \quad \text{en} \quad y'(0) = \dfrac{dy}{dx}(0) = 10 \end{cases} \tag{1}$$

Opmerking: Deze vraag heeft niets met de vorige vraag te maken!

5. **BONUS** Gegeven is de volgende eerste-orde differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

Bepaal de algemene oplossing middels de substitutie $u = 1 - \sqrt{x}$.