

Tussentoets Wiskunde Blok I

Maandag 20 oktober 2014

Veel succes!

1. Gegeven is de lijn

$$\frac{y}{12} - \frac{1}{3} = x$$

- (a) Geef de vergelijking van de lijn die parallel is aan bovenstaande lijn en door het punt (2,4) gaat.
- (b) Geef de vergelijking van de lijn die loodrecht op de bovenstaande lijn staat en door het punt (-1,6) gaat.

2. Los de volgende ongelijkheid op met behulp van wiskunde

$$3 \leq |2x - 1| \leq 9$$

3. Gegeven is de derde-graads functie

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

- (a) Iemand beweert dat deze functie deelbaar door $(x - 2)$. Laat zien dat dit persoon gelijk heeft.
- (b) Laat met behulp van wiskunde zien welke nulpunten $f(x)$ heeft.
- (c) Voor welke waarde(n) van x geldt

$$f(x) \geq 0$$

4. Stel dat $\sin(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ bepaal dan $\cos(\theta)$, $\sin(2\theta)$ en $\tan(2\theta)$.

5. Laat zien dat de volgende goniometrische gelijkheid correct is:

$$\tan(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}$$

6. Gebruik de eigenschappen van logaritmen om de volgende uitdrukking om te werken naar sommen en verschillen van zo eenvoudig mogelijke logaritmen

$$\ln \left(\frac{x^3 \tan^3(x)}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)$$

7. Gegeven is de functie

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

- (a) Bepaal het domein en bereik van $f(x)$ en motiveer dat in wiskundige bewoordingen.
- (b) Bestaat er een inverse functie? Waarom wel of waarom niet? Motiveer.
- (c) Indien het antwoord 'ja' is, bepaal dan $f^{-1}(x)$. Indien 'nee', ga door naar de volgende opgave.

8. Voor welke waarde van het getal $a \in \mathbf{R}$ geldt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2 + 1}{2x^2 - 5} = \frac{9}{4}$$

Hint: Kalm blijven, is vrij simpel...

9. Bepaal de volgende limiet

$$\lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{x + 9}{x^2 - 81}$$

10. Gegeven is de functie

$$f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$$

Bepaal de inverse functie $f^{-1}(x)$ en het domein van de inverse functie.

TT 2014 Blok I

$$1. \quad \frac{y}{12} - \frac{1}{3} = x \quad y - \frac{12}{3} = 12x$$

$$f(x) = y = 12x + 4$$

a. Lijn parallel aan $f(x)$ die door $(2, 4)$ gaat?

$$g(x) = 12x + b$$

↳ Rico het zelfde!

$$4 = 24 + b \rightarrow b = -20$$

$$g(x) = 12x - 20$$

b. \perp op $f(x)$ en door $(-1, 6)$

$$h(x) = ax + c \quad f(x) \perp g(x) \rightarrow 12 \cdot a = -1$$

$$a = -\frac{1}{12} \rightarrow h(x) = -\frac{1}{12} \cdot x + c$$

$$6 = \frac{1}{12} + c \rightarrow c = 6 - \frac{1}{12} = 5\frac{11}{12}$$

$$h(x) = -\frac{1}{12}x + 5\frac{11}{12}$$

$$2. \quad 3 \leq |2x - 1| \leq 9$$

4 mogelijkheden:

$$2x - 1 \leq 9 \rightarrow 2x \leq 10 \rightarrow \boxed{x \leq 5}$$

$$-(2x - 1) \leq 9 \rightarrow -2x + 1 \leq 9 \rightarrow$$

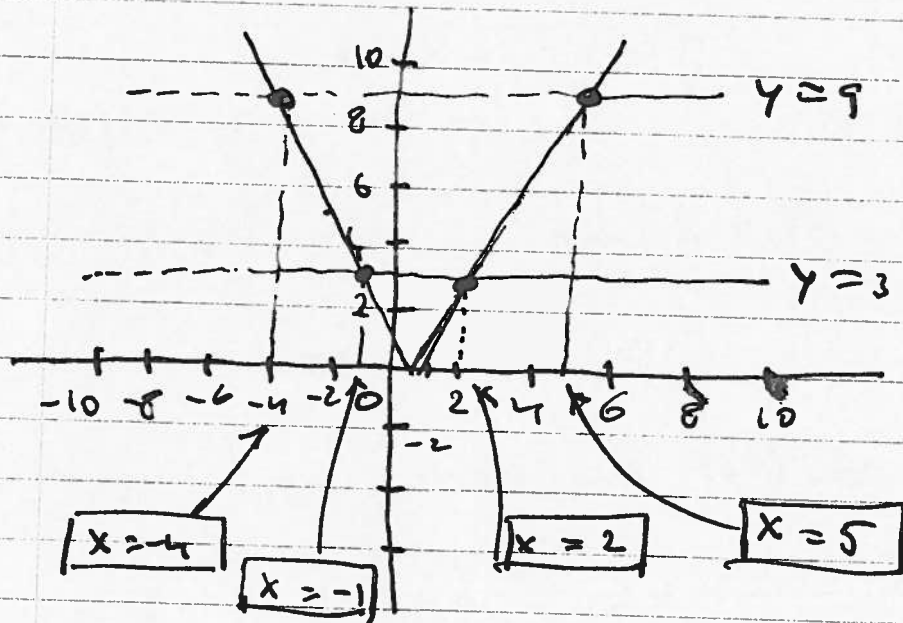
$$-2x \leq 8 \rightarrow 2x \geq -8 \quad \boxed{x \geq -4}$$

$$3x \leq 2x - 1 \rightarrow 4 \leq 2x \rightarrow 2x \geq 4$$

$$\boxed{x \geq 2}$$

$$3x \leq -(2x - 1) \rightarrow 2 \leq -2x \rightarrow$$

$$-2 \geq 2x \rightarrow 2x \leq -2 \rightarrow \boxed{x \leq -1}$$



$$-4 \leq x \leq -1 \quad \wedge \quad 2 \leq x \leq 5$$

3. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

a. Deelbaar door $(x-2)$

$$\begin{array}{r}
 x-2 \mid x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \mid x^2 - 4x + 3 \\
 \underline{x^3 - 2x^2} \\
 -4x^2 + 11x \\
 \underline{-4x^2 + 8x} \\
 3x - 6 \\
 \underline{3x - 6} \\
 0
 \end{array}$$

$$x-2 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

↓

$$\boxed{x=2}$$

∨

$$(x-1)(x-3) = 0$$

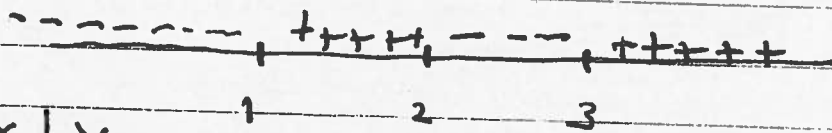
$$\boxed{x=1}$$

∨

$$\boxed{x=3}$$

c. $f(x) \geq 0$

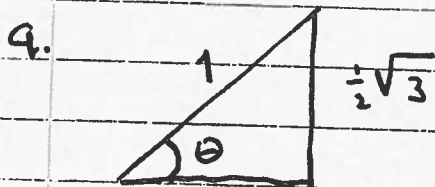
tekenverloop:



x	y
0	-6
3/2	3/8
5/2	-3/8
4	6

$$1 \leq x \leq 2 \quad \vee \quad x \geq 3$$

4. $\sin(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$



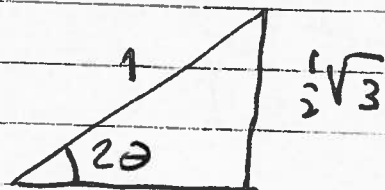
Pythagoras in eenheids cirkel:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4} \cdot 3} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

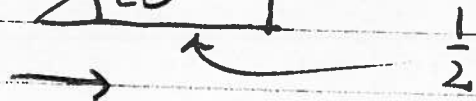
$$\cos \theta = \frac{\text{aanliggende}}{\text{hypotenuse}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

b. $\sin 2\theta = 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$$



Dus ook $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$



$$\tan(2\theta) = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{2}}{1} = \sqrt{3}$$

$$5. \quad \tan \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}$$

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2 \theta$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin \theta \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{1 - (1 - 2\sin^2 \theta)}{2\sin \theta \cos \theta} = \frac{2\sin^2 \theta}{2\sin \theta \cos \theta} = \\ &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta! \end{aligned}$$

$$6. \quad \ln\left(\frac{x^3 \cdot \tan^3 x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) = \ln x^3 + \ln \tan^3 x - \ln \sqrt{x^2 - 1} =$$

$$3 \ln x + 3 \ln(\tan x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1)$$

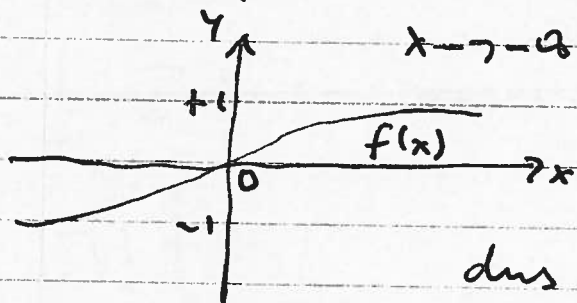
$$7. \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$9. \quad \text{domain: } \boxed{x \in \mathbb{R}}$$

$$\text{bereik: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^\infty - 1}{e^\infty + 1} = 1$$

$$\boxed{-1 < y < 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^{-\infty} - 1}{e^{-\infty} + 1} = -1$$



Eén op één functie,

dus de inverse functie bestaat!

c $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \rightarrow$ binnenste
buiten heren

$$y(e^x + 1) = e^x - 1$$

$$ye^x + y = e^x - 1$$

$$e^x(y - 1) = -y - 1 \rightarrow$$

$$e^x = \frac{-y - 1}{y - 1} = \frac{y + 1}{1 - y}$$

$$x = \ln\left(\frac{y + 1}{1 - y}\right) \rightarrow x \text{ en } y$$

verwisselen

$$f^{-1}(x) = y = \ln\left(\frac{x + 1}{1 - x}\right)$$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + 1}{2x^2 - 5} = \frac{9}{4} \quad a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{5}{x^2}} = \frac{a}{2} = \frac{9}{4} \rightarrow$$

$$a = \frac{9}{2} = 4,5$$

9. $\lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{x + 9}{x^2 - 81} = \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{(x + 9)}{(x + 9)(x - 9)} =$

$$\lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{1}{(x - 9)} \quad u = x - 9 \rightarrow$$

Substitutie

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{u} = +\infty$$

10. $f(x) = \frac{x-1}{x+1} \rightarrow$ binnenste
bunten.

$$y = \frac{x-1}{x+1} \rightarrow y(x+1) = x-1$$

$$yx + y = x - 1 \rightarrow x(y-1) = -y-1$$

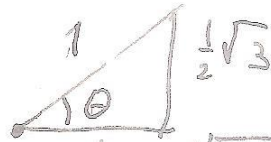
$$x = \frac{-y-1}{y-1} = \frac{y+1}{1-y} \quad x \text{ en } y \text{ omwisselen}$$

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x+1}{1-x}$$

Bereik $f^{-1}(x) \rightarrow x \in \mathbb{R}, x \neq 1$

$$4. \sin \theta = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$



$$\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cdot \cos \theta = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tan(2\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{\sin(2\theta)}{1 - 2 \sin^2(\theta)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1 - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1 - \frac{3}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$